



Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC
Pavilhão de Ciência Exatas e Tecnológicas
Curso de Ciência da Computação

Variáveis Aleatórias Discretas

CET083 - Probabilidade e Estatística
Professor: José Cláudio Faria
Aluna: Juliana Midlej
Agosto/2019

Variáveis Aleatórias

Uma **variável aleatória** pode ser entendida como uma variável quantitativa (e qualitativa), cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios.

É toda e qualquer variável associada a uma probabilidade, isto é, seus valores estão associados a um experimento aleatório. É definida como uma função que associa um elemento do espaço amostral a um valor numérico.

Em geral, são identificadas por letras maiúsculas e cada um de seus possíveis valores por letras minúsculas correspondentes.

Variáveis Aleatórias

Definição formal:

Seja E um experimento e S o espaço amostral associado ao experimento. Uma função Y , que associe a cada elemento ($s \in S$) um número real $Y(s)$ é denominada **variável aleatória**.

Duas variáveis aleatórias X e Y são **independentes** se, e somente se verificarem a seguinte propriedade: a probabilidade de ocorrência simultânea de X e Y for igual ao produto das respectivas probabilidades individuais.

Exemplo

Seja um experimento aleatório que consiste no lançamento de dois dados e deseja-se saber a soma dos valores da face no fim do lançamento.

E: lançamento de dois dados simultaneamente

S: $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Y: soma dos valores da face

$$Y(1, 1) = 2$$

$$Y(1, 2) = Y(2, 1) = 3$$

Exemplo

Seja um experimento aleatório que consiste no lançamento de duas moedas e deseja-se o número de caras obtidas.

E: lançamento de duas moedas

Y: número de caras obtidas nas duas moedas

$$S = \{(c,c), (c,k), (k,c), (k,k)\}$$

$$Y(k,k) = 0$$

$$Y(c,k) = Y(k,c) = 1$$

$$Y(c,c) = 2$$

Variáveis Aleatórias

Classificação:

- **Variáveis Aleatórias Discretas (VAD)**

O número de valores de Y (seu contradomínio), finito ou infinito, é numerável.

Relativas a quantidades, contagens e enumerações.

- **Variáveis Aleatórias Contínuas (VAC)**

Caso seu contradomínio seja um intervalo ou uma coleção de intervalos, ela será contínua.

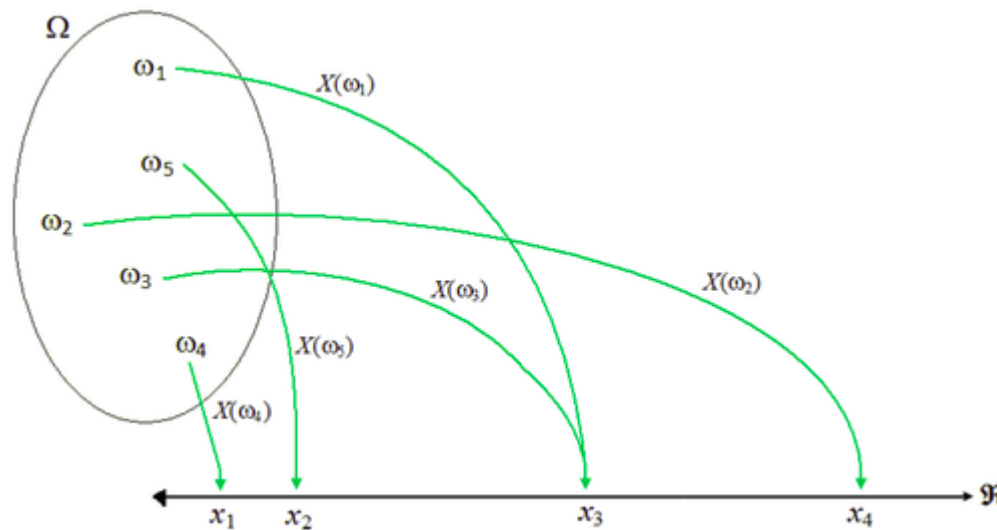
Relativas a coleções de intervalos.

Variáveis Aleatórias Discretas

Definição Formal:

Suponha um experimento “E” e um espaço amostral “ Ω ”, associado ao experimento.

Uma função X , que associe a cada elemento ($w \in \Omega$) um número real $X(s)$ é denominada variável aleatória.



Função de Probabilidade

Chama-se função de probabilidade da VAD X a função que associa cada valor x_i com a sua probabilidade de ocorrência:

$$P(X = x_i) = P(x_i) = p_i$$

E satisfaz as condições:

i) $P(x_i) \geq 0$, para todo x_i

ii) $\sum_i P(x_i) = 1$

Distribuição de probabilidade

A coleção de pares $[x_i, P(x_i)]$ chama-se distribuição de probabilidade da VAD X e pode ser representada por tabela, gráfico ou fórmula.

Exemplo

E: lançamento de um dado viciado cuja probabilidade é proporcional ao valor obtido no lançamento

$$(P(1) = p, P(2)=2p, \dots, P(6)=6p)$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

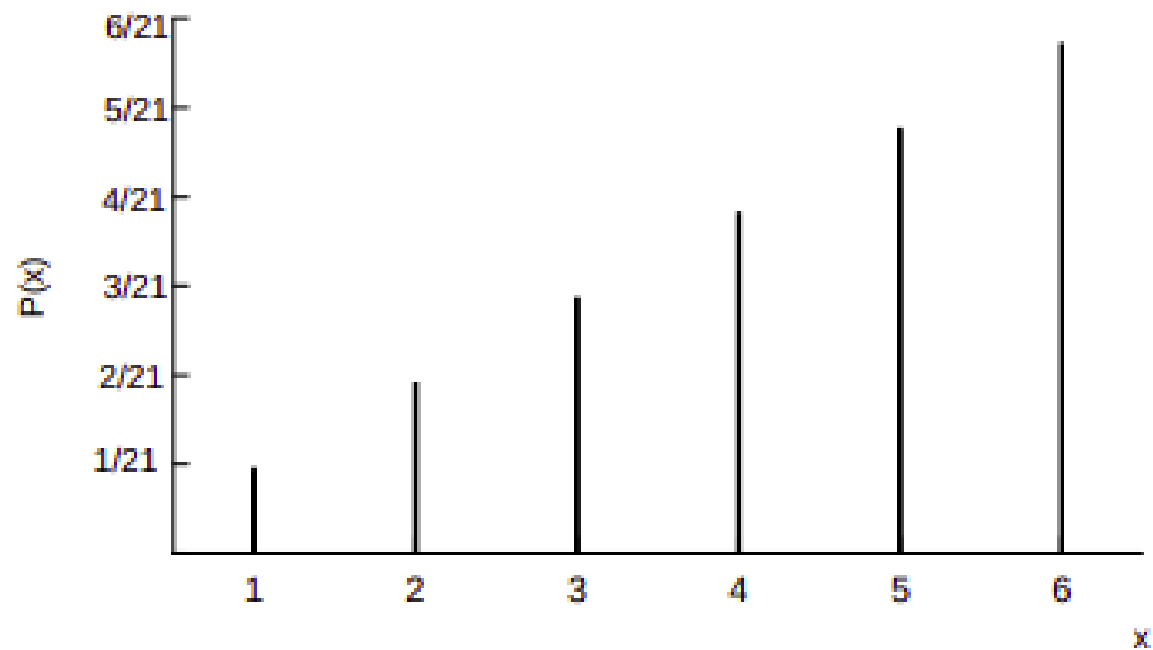
X: resultado do lançamento

Tabela:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

Exemplo

Gráfico:



Exemplo

Fórmula:

$$P(x_i) = \begin{cases} \frac{x_i}{21}, & \text{para } x_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{para outros valores de } x_i \end{cases}$$

Função de Repartição

A função de repartição ou função de distribuição acumulada da VAD Y , no ponto y , é a probabilidade de que Y assuma um valor menor ou igual a y .

$$F(y) = P(Y \leq y)$$

Exemplo

Admita que a VAD Y tome os valores 0, 1 e 2 com probabilidades $1/3$, $1/6$ e $1/2$ respectivamente.

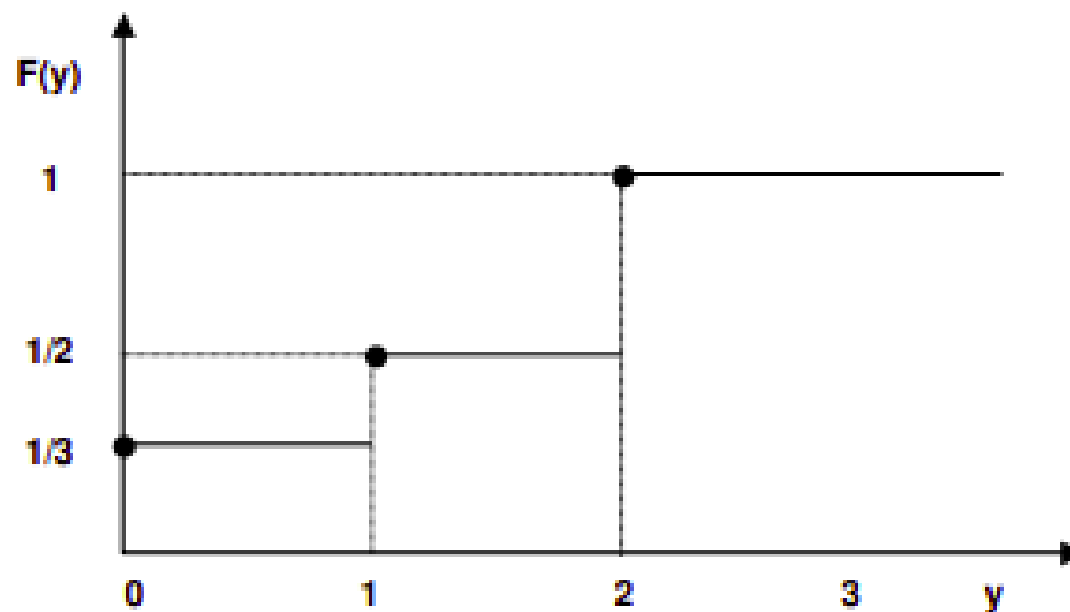
- $F(y) = 0$ se $y < 0$
- $F(y) = 1/3$ se $0 \leq y < 1$
- $F(y) = 1/3 + 1/6 = 1/2$ se $1 \leq y < 2$
- $F(y) = 1/2 + 1/2 = 1$ se $2 \leq y$

Exemplo

Tabela:

y	0	1	2
f(y)	1/3	1/6	1/2
F(y)	1/3	1/3 + 1/6 = 1/2	1/2 + 1/2 = 1

Gráfico:



Função de Repartição

Propriedades:

- $F(y) = \sum_{(y_i \leq y)} P(y_i)$
- $F(-\infty) = 0$
- $F(+\infty) = 1$
- $P(a < Y \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq Y \leq b) = F(b) - F(a) + P(Y = a)$
- $P(a < Y < b) = F(b) - F(a) - P(Y = b)$

Esperança Matemática

A esperança matemática ou valor esperado corresponde ao que se espera que aconteça em média.

Seja Y uma VAD, ela é a soma das probabilidades de cada possibilidade de saída da experiência multiplicada pelo seu valor. Isto é, representa o valor médio “esperado” de uma experiência se ela for repetida muitas vezes.

$$E(Y) = \sum y_i \cdot P(y_i)$$

$$E(Y) = \mu(y)$$

Exemplo

E = lançamento de um dado não-viciado

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Y = valor obtido

$P(Y) = 1/6$ para todo Y

- $E(Y) = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6$
- $E(Y) = 3.5$

Esperança Matemática

Propriedades:

Obs: K é constante.

- $E(K) = K$
- $E(Y \pm K) = E(Y) \pm K$
- $E(KY) = K.E(Y)$
- $E(Y \pm Z) = E(Y) \pm E(Z)$
- Se Y e Z são independentes: $E(YZ) = E(Y). E(Z)$

Variância

A variância fornece uma medida de dispersão da variável aleatória, ou seja, ela mede o quanto a variável se afasta do valor esperado.

Seja Y uma variável aleatória. Definimos a variância de Y , denotada por $\text{Var}(Y)$:

$$\sigma^2 = \text{Var}(Y) = E[Y - E(Y)]^2 = E(Y - \mu)^2$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

Exemplo

E: lançamento de duas moedas

Y: número de caras obtidas nas duas moedas

$$S = \{(c,c), (c,k), (k,c), (k,k)\}$$

- $Y(k,k) = 0$
- $Y(c,k) = Y(k,c) = 1$
- $Y(c,c) = 2$

- $P(0) = P(2) = 0.25$
- $P(1) = 0.5$

Exemplo

E: lançamento de duas moedas

Y: número de caras obtidas nas duas moedas

$$S = \{(c,c), (c,k), (k,c), (k,k)\}$$

- $E(Y) = 0*0.25 + 2*0.25 + 1*0.5 = 1.0$
- $E(Y^2) = 0^2*0.5 + 2^2*0.25 + 1^2*0.5 = 1.5$

Lembrando a fórmula de $\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

- $\text{Var}(Y) = 1.5 - 1.0^2 = 0.5$

Variância

Propriedades:

- $\text{Var}(K) = 0$
- $\text{Var}(Y \pm K) = \text{Var}(Y)$
- $\text{Var}(KY) = K^2 \cdot \text{Var}(Y)$
- $\text{Var}(Y + Z) = \text{Var}(Y) + \text{Var}(Z)$
- $\text{Var}(Y - Z) = \text{Var}(Y) + \text{Var}(Z)$

Covariância

Dadas duas variáveis aleatórias, Y e Z , quaisquer, a covariância entre Y e Z , denotada por $\text{Cov}(Y, Z)$, é por definição:

$$\text{Cov}(Y, Z) = E[Y - E(Y)][Z - E(Z)]$$

$$\text{Cov}(Y, Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z)$$

Distribuições de Variável Aleatória Discreta

Distribuição de Bernoulli:

Na prática, muitos experimentos admitem apenas dois resultados:

- 1. O resultado de um exame médico para detecção de uma doença é positivo ou negativa.*
- 2. Um entrevistado concorda ou não com a afirmação feita.*
- 3. No lançamento de uma moeda ocorre cara ou coroa.*

Estas situações tem alternativas dicotômicas e podem ser representadas genericamente por resposta do tipo sucesso-fracasso.

Associaremos p , a probabilidade de sucesso, ao evento que nos interessa e $1-p$, será a probabilidade de fracasso.

Distribuições de Variável Aleatória Discreta

Distribuição de Bernoulli:

Uma V.A. (X) de Bernoulli é aquela que assume apenas dois valores 1, se ocorrer sucesso (S) e 0, se ocorrer fracasso (F), com probabilidade de sucesso p , isto é,

$X = 1$, se ocorrer sucesso ou

$X = 0$, se ocorrer fracasso.

E sua função de probabilidade é dada por:

$$P(1) = p$$

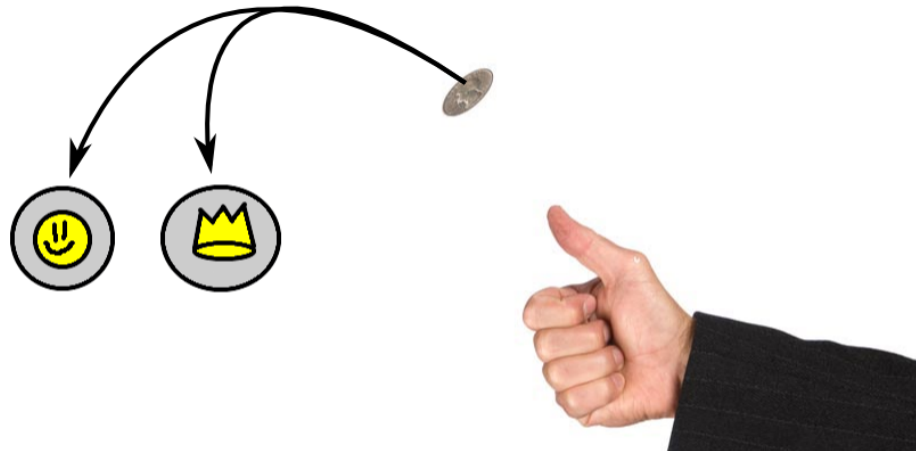
$$P(0) = 1 - p$$

Se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ mostrar-se que: $E(X)=p$ e $\text{Var}(X)=p(1-p)$

Distribuições de Variável Aleatória Discreta

Distribuição Binomial:

Um experimento binomial (baseando-se na **Tentativa de Bernoulli**) é um experimento aleatório onde as repetidas tentativas também resultam em apenas dois resultados. O diferencial é que na **distribuição binomial** a variável aleatória indica a probabilidade de x sucessos em n tentativas.



Distribuições de Variável Aleatória Discreta

Distribuição Binomial:

A variável aleatória discreta denota o número de sucessos dado um experimento aleatório binomial e a função de probabilidade dessa variável é definida por:

$$P(x) = f(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

onde:

- $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$;
- x é o número de sucessos desejados;
- n é o número de tentativas;
- p é a probabilidade do sucesso individual.

Distribuições de Variável Aleatória Discreta

Distribuição Binomial:

A **esperança matemática (média)** é definida por:

$$E(X) = np$$

A **variância** é dada por:

$$\sigma^2 = V(x) = np(1 - p)$$

A **distribuição binomial** é obtida através da expansão binomial:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Onde $a = p$ (sucesso) e $b = 1 - p$ (fracasso)

Distribuições de Variável Aleatória Discreta

Distribuição Binomial:

Exemplo:

Uma amostra de ar tem 10% de chance de conter uma certa molécula rara. Encontre a probabilidade de que nas próximas 18 amostras, exatamente 2 contenham a molécula rara.

Temos:

$$✓ \quad x = 2$$

$$✓ \quad n = 18$$

$$✓ \quad p = 0.1$$

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

$$P(2) = \binom{18}{2} 0.1^2 (1 - 0.1)^{18-2}$$

O resultado indica que há a probabilidade de se encontrar a molécula rara em 2 das próximas 18 amostras coletadas. E essa probabilidade é de aproximadamente 28%.

Distribuições de Variável Aleatória Discreta

Distribuição de Poisson:

A **Distribuição de Poisson** expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer num certo período de tempo ou região espacial.

Na distribuição anterior (Binomial) levávamos em consideração os sucessos e os fracassos. Na **Distribuição de Poisson**, levaremos em conta apenas os sucessos num determinado intervalo.

Exemplo:

Os times de futebol, num determinado campeonato, fazem em média 15 gols em todo o campeonato (“15 sucessos”). Porém, se um time termina um campeonato com 10 gols, não tem sentido falar que este time teve ao longo o campeonato 10 gols e 5 “não gols”.

Distribuições de Variável Aleatória Discreta

Distribuição de Poisson:

A **Distribuição de Poisson** trabalha com a contagem de sucessos num intervalo subdividido em subintervalos.

As propriedades do processo de **Poisson** são:

- A probabilidade de mais de uma contagem num subintervalo é zero.
- A contagem em cada subintervalo independe de outros intervalos.
- A probabilidade de uma contagem (probabilidade de um sucesso) em um subintervalo é o mesmo para todos os subintervalos e é proporcional ao comprimento do intervalo.

Distribuições de Variável Aleatória Discreta

Distribuição de Poisson:

A função de probabilidade de Poisson é definida por:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

onde:

- λ número médio de eventos num intervalo;
- x é o número de contagens (sucessos).

Distribuições de Variável Aleatória Discreta

Distribuição de Poisson:

A **esperança matemática (média)** é definida por:

$$E(X) = \lambda$$

A **variância** é dada por:

$$\sigma^2 = V(x) = \lambda$$

Distribuições de Variável Aleatória Discreta

Distribuição de Poisson:

Exemplo:

Em um fio delgado de cobre, o número de falhas no fio segue a distribuição de Poisson, com uma média de 2,3 falhas por milímetro. Determine a probabilidade de existir exatamente 2 falhas em um milímetro de fio.

Temos:

- ✓ $x = 2$
- ✓ $\lambda = 2,3$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

$$f(2) = \frac{e^{-2,3} \cdot 2,3^2}{2!}$$

$$f(2) = 0,265$$

Distribuições de Variável Aleatória Discreta

- **Distribuição Binomial Negativa**

A variável aleatória discreta representa o número de tentativas necessárias para se obter **k sucessos**.

- **Distribuição Geométrica**

Semelhante à distribuição binomial negativa, mas neste caso a variável aleatória representa o número de tentativas necessárias para se conseguir o primeiro sucesso.

- **Distribuição Hipergeométrica**

Descreve a probabilidade de se retirar elementos de um determinado tipo numa sequência de **n extrações** de uma população finita e sem reposição.

Exemplo

Uma jogada única de uma moeda. A moeda pode dar “coroa” com a probabilidade p e “cara” com probabilidade $1 - p$. A experiência é dita justa, se $P = 0,5$, indicando a origem dessa terminologia em jogos de aposta (a aposta é justa, se ambos os possíveis resultados tem a mesma probabilidade).

A f [função de probabilidade] dessa distribuição é:

$$f(k; p) = \begin{cases} p & \text{se } k = 1, \\ 1 - p & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Exemplo

Um jogador lança 3 moedas não viciadas. Ele ganha R\$ 6,00, se três caras ocorrerem; ganha R\$ 3,00, se duas caras ocorrerem e ganha R\$ 1,00, se somente uma cara ocorrer. Por outro lado, ele perde R\$ 10,00, se 3 coroas ocorrerem, encontre o valor esperado do jogo.

S: {(Ca, Ca, Ca), (Ca, Ca, Co), (Ca, Co, Co), (Co, Co, Co), (Co, Co, Ca), (Co, Ca, Ca), (Co, Ca, Co), (Ca, Co, Ca)}

Exemplo

$$n(S) = 8$$

$$M = E(x)$$

X	P(X)	X.P(X)	X ²	X ² . P(x)
6,00	1/8	6/8	36	36/8
3,00	3/8	9/8	9	27/8
1,00	3/8	3/8	1	3/8
-10,00	1/8	-10/8	100	100/8

Exemplo

$$M = E(x) = \sum X.P(x)$$

$$E(x) = 6/8 + 9/8 + 3/8 - 10/8 = 8/8 = 1$$

$$\text{Var}(x) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(x) = [\sum x^2 \cdot P(x)] - M^2$$

$$\text{Var}(x) = 166/8 - 1^2$$

$$\text{Var}(x) = 19,75$$

$$\sigma = \sqrt{19,75} = 4,44$$

Referências

<http://www.portalaction.com.br/probabilidades>

https://pt.wikipedia.org/wiki/Vari%C3%A1vel_aleat%C3%B3ria

<http://www.dpi.ufv.br/~peternelli/inf162.www.16032004/materiais/CAPITULO4.pdf>

https://nbcgib.uesc.br/lec/download/faria/apostilas/CET018_10ed_1pf.pdf