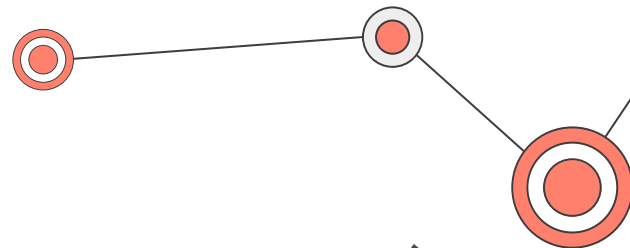




Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC ...
Pavilhão de Ciência Exatas e Tecnológicas
Curso de Ciência da Computação



Variáveis Aleatórias Contínuas

CET083 - Probabilidade e Estatística

Professor: José Cláudio Faria

Aluno: Matheus Miranda Brandão

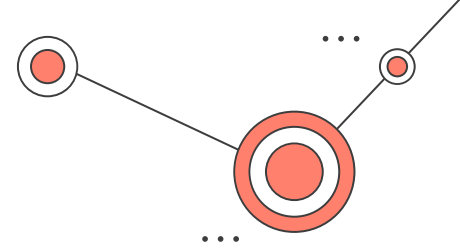
Alterações realizadas por: João Carlos Ribas Chaves Júnior

Tainah Bomfim Marques

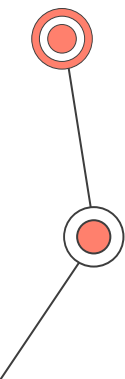
Marcus Bitencourt

2021.2

Variáveis Aleatórias Contínuas



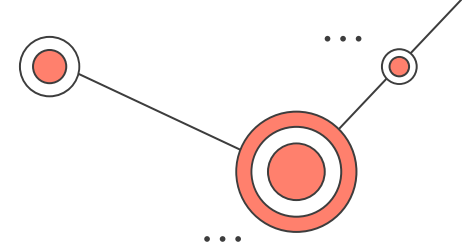
Uma variável aleatória contínua pode assumir qualquer valor numérico em um determinado intervalo ou série de intervalos. É uma variável que assume valores dentro de intervalos de números reais. Ou seja, entre quaisquer dois elementos vizinhos há quantidades intermediárias infinitas, dependentes da sensibilidade do instrumento de medida.



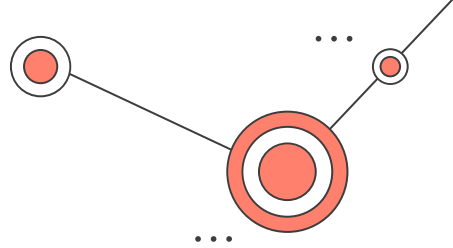
Experimento	Variável aleatória (Y)	Possíveis valores para a VAC
Trabalhar em um projeto	Percentual executado após 30 dias	$0 \leq Y \leq 100\%$
Observar um operador de máquina agrícola	Tempo ocioso em um dia	$0 \leq Y \leq 24 \text{ hs}$
Pulverizar 10.000 m ² de uma área agrícola	Volume de água gasto	$0 \leq Y \leq \infty$

Exemplo

Imagine nas Olimpíadas o lançamento de martelo. Sabemos de antemão que os valores do lançamento de martelo atingem no máximo a distância de 60 metros e a distância mínima classificatória de 30 metros. Ou seja, todos os lançamentos serão dentro deste intervalo, podendo assumir uma infinidade de possibilidades, pois sempre existirá uma fração para medir a menor diferença possível entre um lançamento e outro, como **59,2512m**. Neste caso X seria uma VAC que assume qualquer valor no intervalo **$30 < X < 60$** .

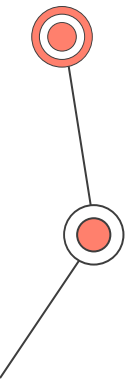


Função Densidade de Probabilidade

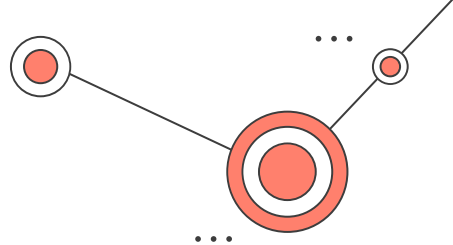


Em probabilidade e estatística, a função densidade de probabilidade (FDP), ou densidade de uma variável aleatória contínua, é uma função que descreve a probabilidade relativa de uma variável aleatória tomar um valor dado.

A probabilidade da variável aleatória contínua assumir um valor pertencente a um determinado intervalo é dada pela integral da densidade dessa variável sobre tal intervalo, ou seja, é dada pela área abaixo da função densidade mas acima do eixo horizontal e entre o menor e o maior valor dessa faixa.



Função Densidade de Probabilidade



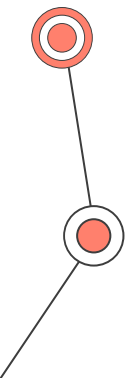
Seja Y uma VAC, a função densidade de probabilidade $f(y)$ é uma função que satisfaz as seguintes condições:

$$a) f(y) \geq 0 \text{ para todo } y \in [a, b] \text{ com } a < b$$

$$b) \int_a^b f(y) dy = 1$$

Observação:

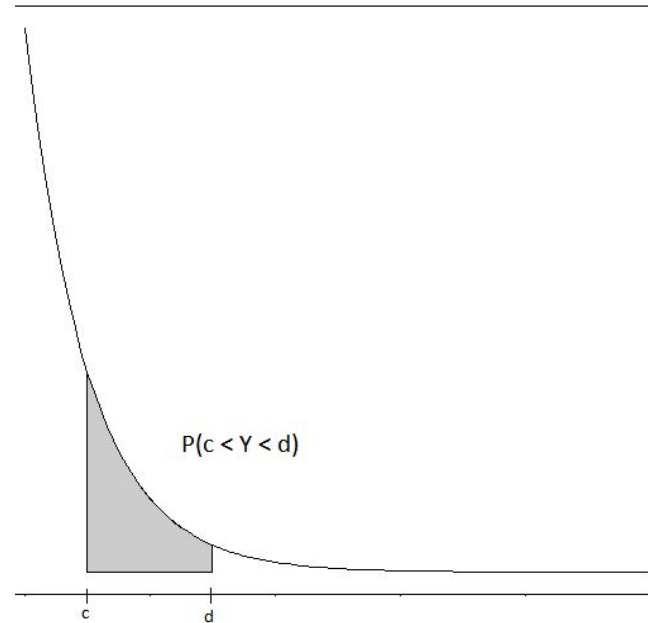
Notar que $f(y)$, densidade de probabilidade, não é probabilidade. Somente quando a função for integrada entre dois limites, ela produzirá uma probabilidade;



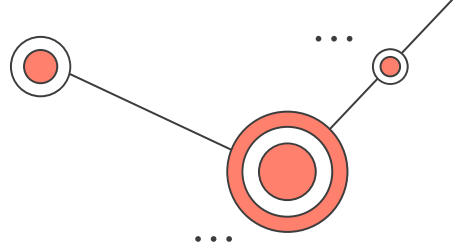
Função Densidade de Probabilidade

Além disso, define-se, para qualquer $[c < d]$, contido no intervalo $[a, b]$:

$$P(c < Y < d) = \int_c^d f(y) dy$$



Função Densidade de Probabilidade



A definição anteriormente citada mostra que a probabilidade de qualquer valor especificado de Y , por exemplo, y_0 , tem $P(Y = y_0) = 0$, pois:

$$P(Y = y_0) = \int_{y_0}^{y_0} f(y)dy = 0$$

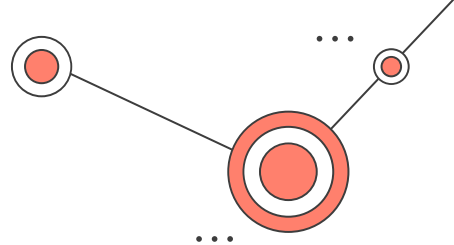
Sendo assim, as probabilidades abaixo serão todas iguais, se Y for uma VAC:

$$P(a \leq Y \leq b) = P(a \leq Y < b) = P(a < Y \leq b) = P(a < Y < b)$$

Para VADs, a probabilidade está concentrada em pontos isolados da reta real. No caso de VACs, a probabilidade está espalhada de modo contínuo em segmentos da reta real.



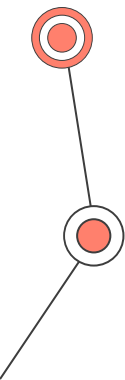
Exemplo



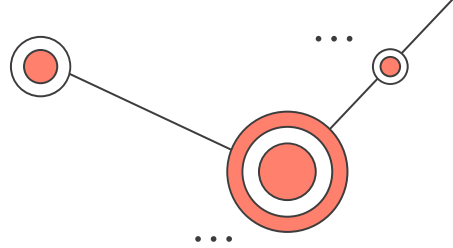
Seja X uma v.a.c com função densidade dada por:

$$f(x) \begin{cases} \frac{c(4x - 2x^2)}{0,} & \text{se } x \in (0,2) \\ & \text{se } x \notin (0,2) \end{cases}$$

- a. Qual o valor de c ?
- b. Calcule a $P(X>1)$



Exemplo



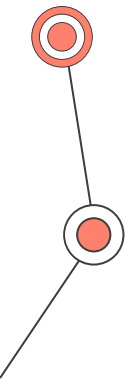
- a. Para $f(x)$ ser uma função de densidade deve obedecer:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

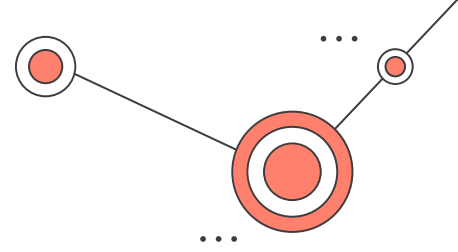
Como a função está nos intervalos entre $(0, 2)$:

$$= c \left(\int_0^2 4x dx - \int_0^2 2x^2 dx \right) = c \left(8 - \frac{16}{3} \right) = \frac{8}{3}c$$

$$c = \frac{3}{8}$$

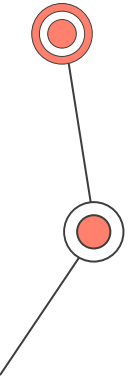


Exemplo

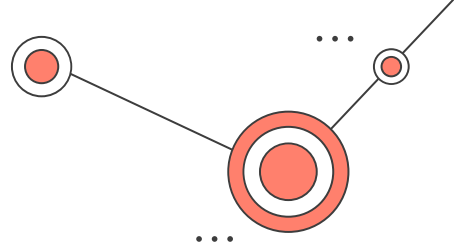


b. Calcule a $P(X > 1)$

$$P(X > 1) = \int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^2 \frac{3}{8} (4x - 2x^2) dx = \frac{1}{2}$$

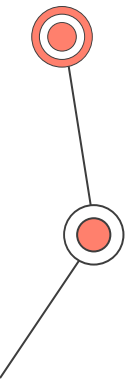


Função de Distribuição Acumulada



A função densidade pode ser obtida a partir da função distribuição acumulada a partir da operação de derivação (quando esta é derivável). A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória T contínua é definida por:

$$F(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



Função de Distribuição Acumulada

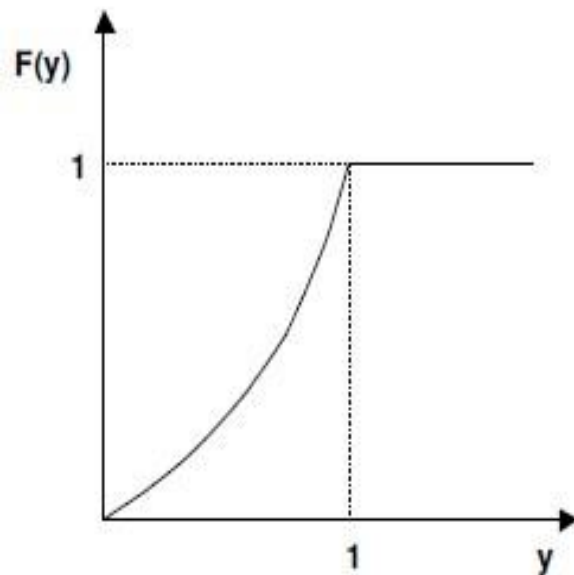
O gráfico de $F(y)$ no caso de uma VAD é constituído por segmentos de retas horizontais (degraus), e no caso de uma VAC, ele é contínuo para todo y .

Quanto a $F(y)$ tem-se:

$$\text{para } y < 0 \quad F(y) = \int_{-\infty}^0 0 dy = 0$$

$$\text{para } 0 \leq y < 1 \quad F(y) = \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^1 2y dy = 1$$

$$\text{para } y \geq 1 \quad F(y) = \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^1 2y dy + \int_1^{+\infty} 0 dy = 1$$



Algumas distribuições



Distribuição Normal

...



Distribuição Qui-Quadrado

...



Distribuição t de Student

...



Distribuição F de Snedecor

...



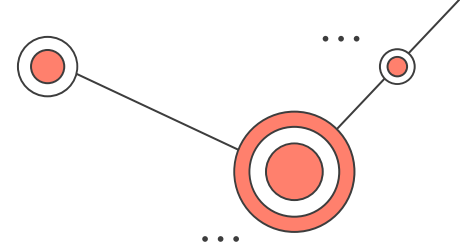


01

Distribuição Normal

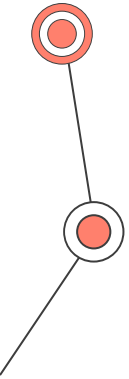


Distribuição Normal

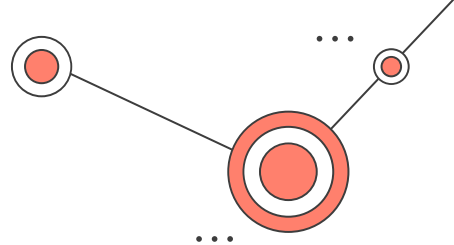


Em meados do século XIX, Friedrich Gauss, com seus estudos sobre eventos da natureza, observou um comportamento padrão entre as amostras estudadas por ele.

Esse comportamento, posteriormente, foi apresentado como a Curva de Gauss. Que mostrava que grande parte dos eventos ficam em torno de um valor médio, com uma certa variabilidade.



Distribuição Normal



Em probabilidade e estatística, a distribuição normal é uma das distribuições de probabilidade mais utilizadas para modelar fenômenos naturais.

Aproximação da Binomial. (Com n suficientemente grande).

Médias e Proporções de grandes amostras seguem Distribuição Normal.

Características:

Forma de sino (Curva Gaussiana)

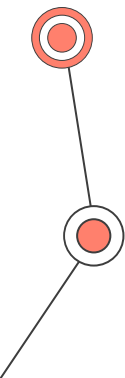
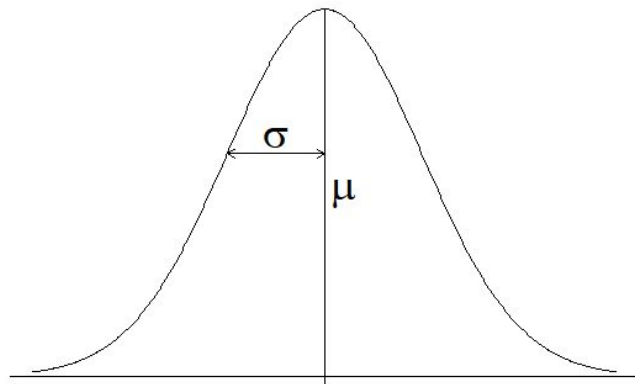
Unimodal

Moda, média e mediana coincidem

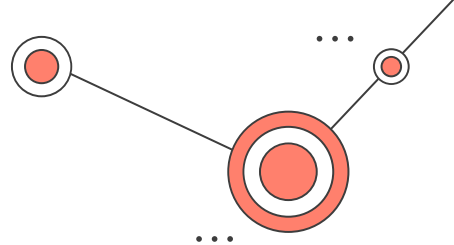
Simétrica em relação a média

Tende a 0 quando se afasta da média

μ é a média e σ o desvio padrão



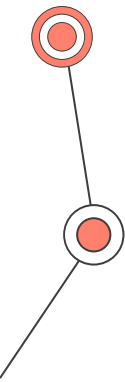
Distribuição Normal



Seja x uma variável aleatória contínua, dizemos que $X \sim N(\mu, \sigma)$ se, e somente se sua FDP for dada por:

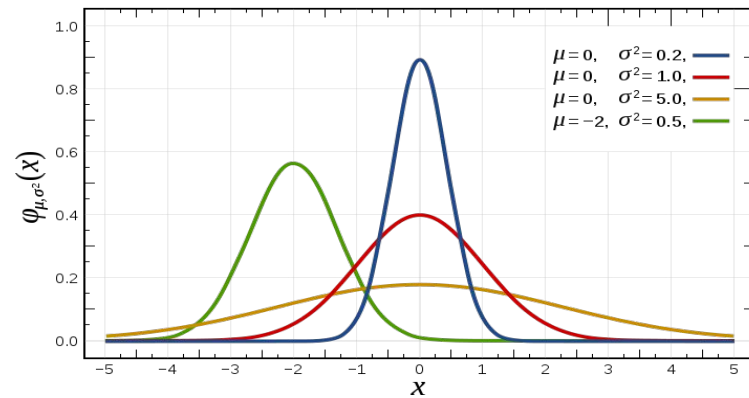
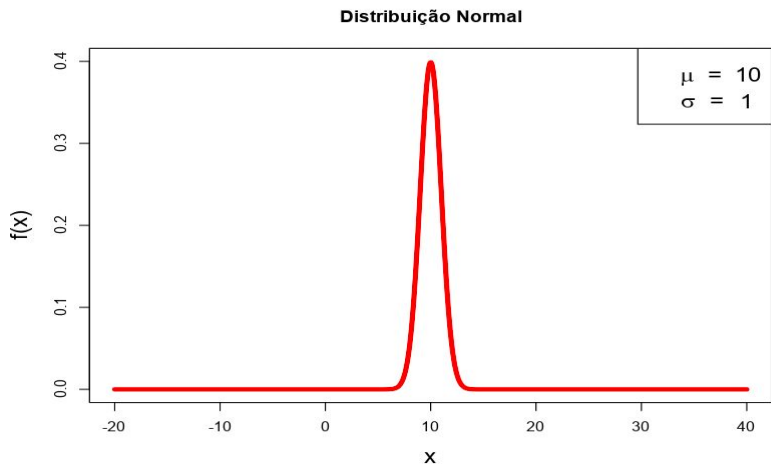
$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}, -\infty < x < \infty, \sigma > 0$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$



Distribuição Normal

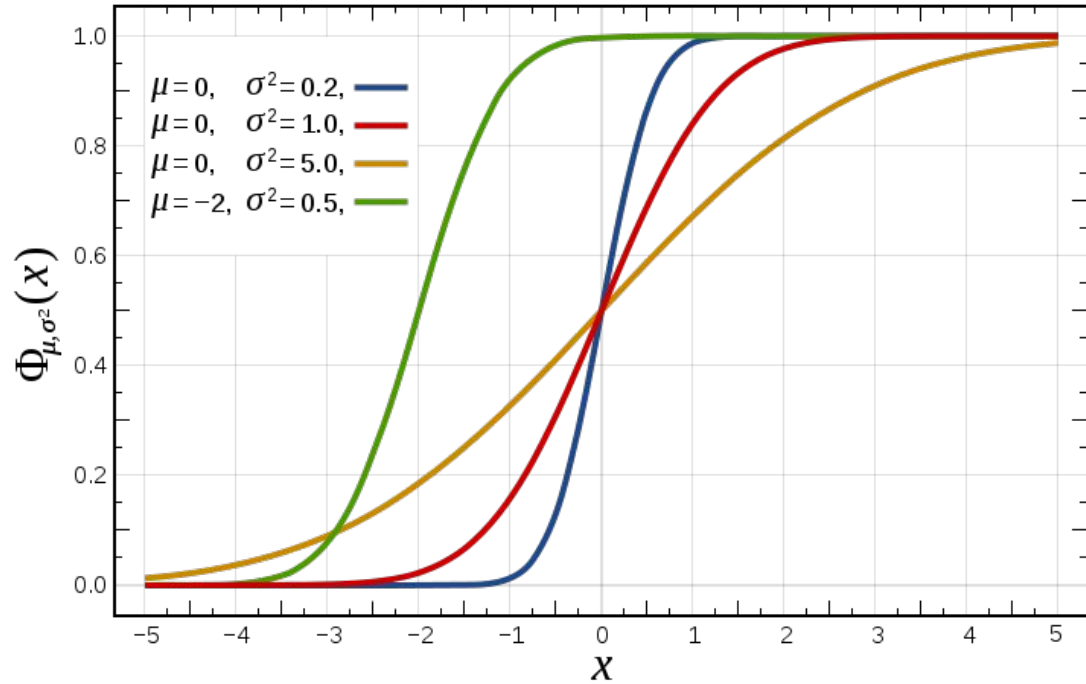
Gráfico da FDP



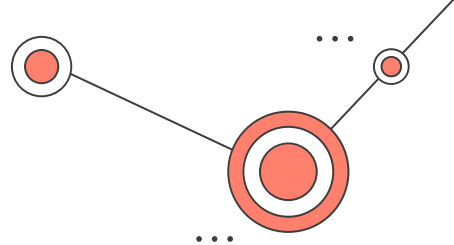
Distribuição Normal

Gráfico da FDA

$$\frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right)$$



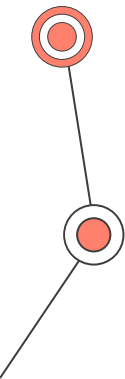
Distribuição Normal Padrão



Para o cálculo das probabilidades utilizando a função densidade de probabilidades surgiam dois problemas:

- I. Relativo a integração de $f(y)$, pois é necessário o desenvolvimento em séries, o que é um cálculo relativamente complexo.
- II. Tabelar todas as probabilidades considerando-se as várias combinações possíveis de μ e σ acarretaria um grande trabalho, pois, $f(y)$ depende dos parâmetros μ e σ .

Esses problemas foram solucionados por meio de uma mudança de variável, obtendo-se, assim, a distribuição normal padronizada ou reduzida ($\mu = 0$ e $\sigma = 1$):

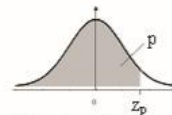


Distribuição Normal Padrão

$$Z_i = \frac{Y_i - \mu}{\sigma}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada




Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$, para todo z , de 0,01 em 0,01, desde $z = 0,00$ até $z = 3,59$
A distribuição de Z é Normal(0;1)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817



02

Distribuição Qui-Quadrado



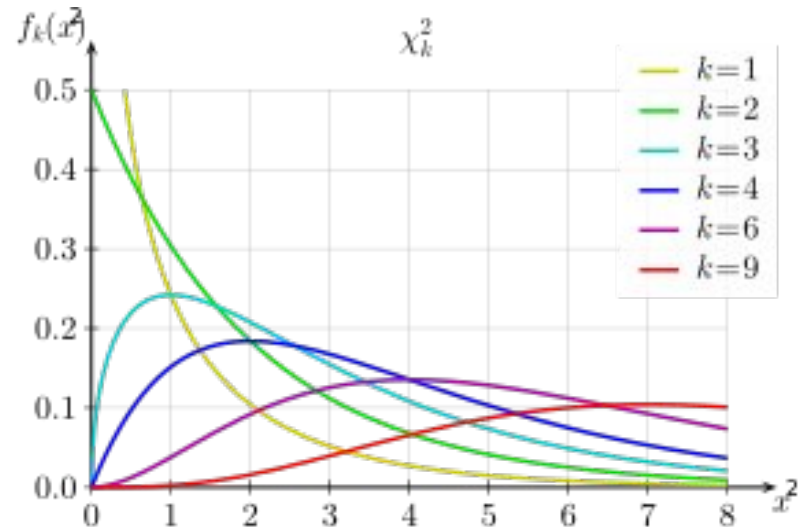
Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)

A distribuição χ^2 (lê-se qui-quadrado) é uma das distribuições mais utilizadas em estatística inferencial, principalmente para realizar testes de χ^2 . Este teste serve para avaliar quantitativamente a relação entre o resultado de um experimento e a distribuição esperada para o fenômeno.

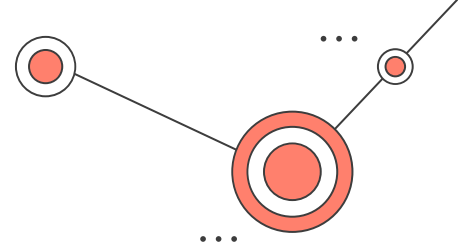
Características:

Particularidade da Distribuição Gama

Assimétrica



Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)



FDP:

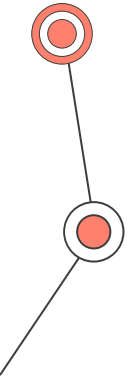
$$f(\chi^2, \varphi) = c \cdot \chi^{2\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

$$c = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot 2^{\frac{\varphi}{2}}}$$

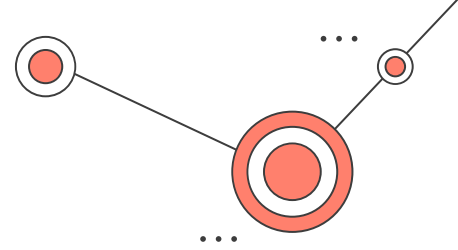
c é uma constante dependente de **φ** e determinada pela condição em que a área sob a curva de probabilidade é igual a um.

φ (lê-se fi) é um parâmetro da função densidade denominado grau de liberdade.

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, 0 < x < \infty$$

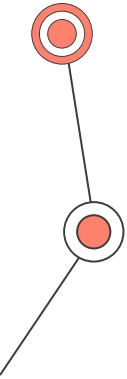


Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)



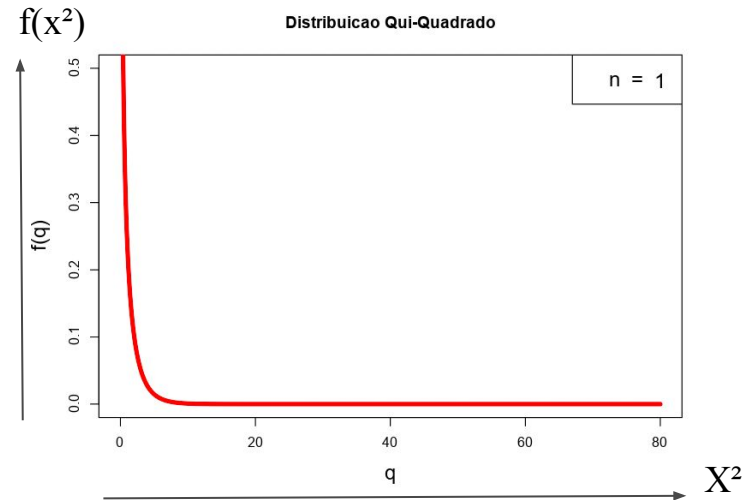
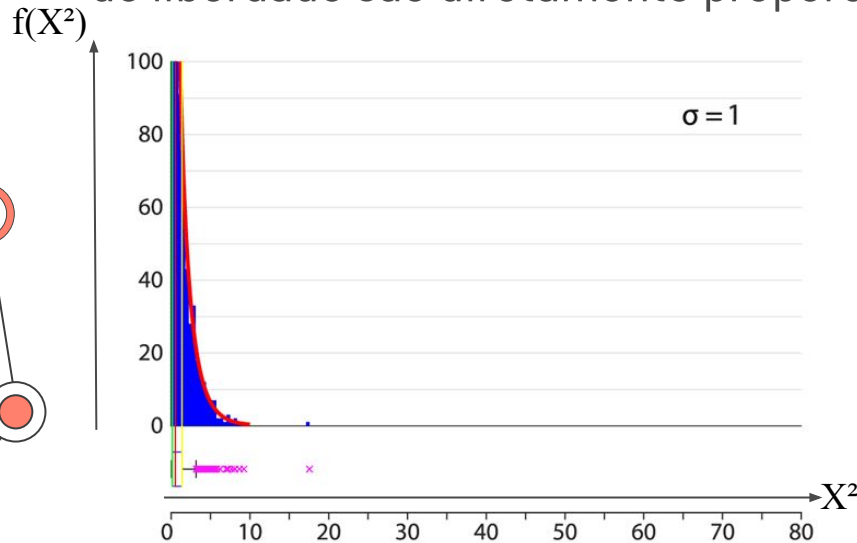
Retirando-se uma amostra de n elementos de uma população normal com média ($\mu=0$) e variância (σ^2), então, a distribuição da estimativa da variância segue uma distribuição de (qui-quadrado) com $n-1$ graus de liberdade.

Na distribuição χ^2 existe uma curva para cada tamanho de amostra (n) e todas curvas tem início em $\chi^2=0$.



Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)

A probabilidade da distribuição qui-quadrado não é simétrica como a da distribuição normal, para aumentar seu estado de simetria é necessário aumentar o seu grau de liberdade, portanto a relação entre simetria e grau de liberdade são diretamente proporcionais.



Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)

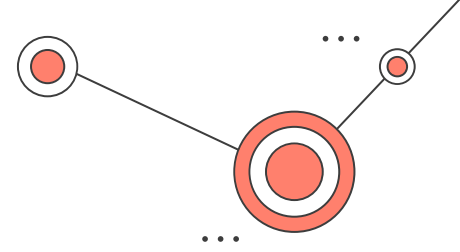
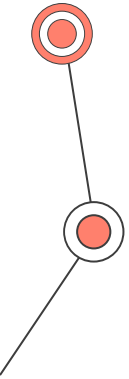
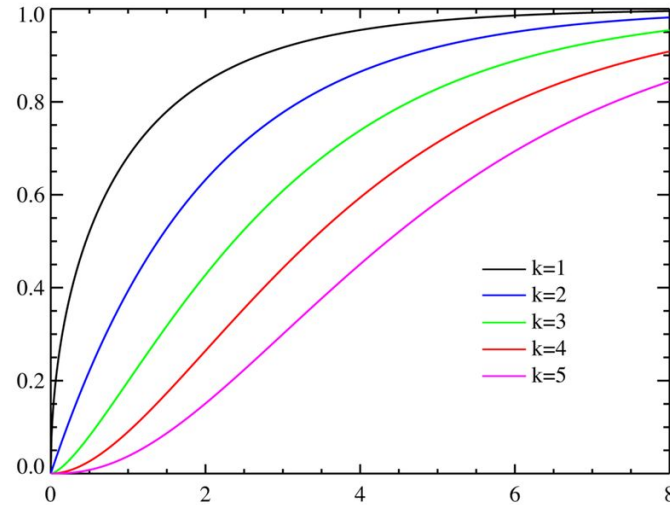
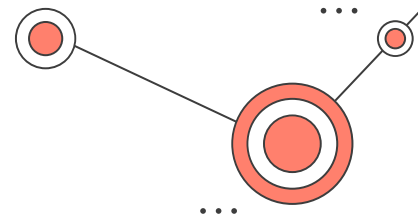


Gráfico da FDA:

$$\frac{1}{\Gamma(k/2)} \gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{x}{2}\right)$$



Teste Qui-Quadrado (χ^2)



Também conhecido como teste de adequação do ajustamento ou aderência.

Procedimentos:

- a. Enunciar as hipóteses estatísticas H_0 e H_1 :

H_0 : Não existe discrepância entre as frequências observadas e esperadas.

H_1 : existe discrepância entre as frequências observadas e esperadas.

- b. Fixar α e escolher a variável qui-quadrado com $\phi = (k-1)$, onde k é o número de eventos.

- c. Com o auxílio de uma tabela de χ^2 determinar o valor crítico entre as regiões de aceitação e rejeição de H_0 .

- d. Calcular o valor da variável $\chi^2_{cal} = \sum_{i=1}^k \frac{(Fo_i - Fe_i)^2}{Fe_i}$

Se $\chi^2_{cal} < \chi^2_{ub} \rightarrow$ Aceitar H_0

Se $\chi^2_{cal} \geq \chi^2_{ub} \rightarrow$ Rejeitar H_0

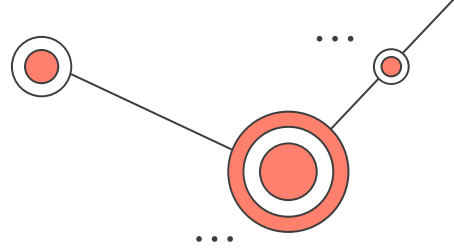
Distribuição Qui-Quadrado

Graus de Liberdade:	Nível de Significância:									
	99.5%	99%	97.5%	95%	90%	10%	5%	2.5%	1%	0.5%
1	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
2	-	-	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
3	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
4	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
5	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
6	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
7	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
8	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
9	1.344	1.644	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
10	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
11	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
12	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
13	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
14	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
15	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
16	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
17	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
18	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
19	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
20	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
21	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
22	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
23	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796

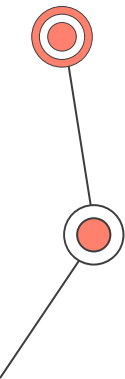
03

Distribuição t de Student

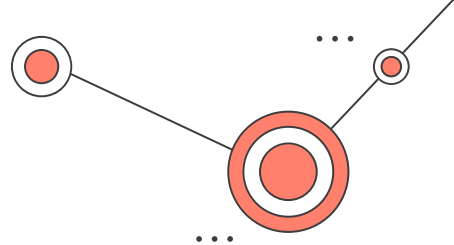
Distribuição t de Student



A distribuição T de Student é uma distribuição de probabilidade estatística, publicada por um autor que se chamou de Student, pseudônimo de William Sealy Gosset, que não podia usar seu nome verdadeiro para publicar trabalhos enquanto trabalhasse para a cervejaria Guinness.



Distribuição t de Student

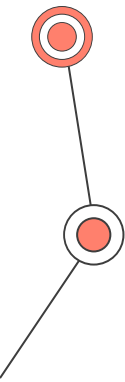


Suponha Z , uma variável aleatória de distribuição normal padrão com média 0 e variância 1, e V , uma variável aleatória com distribuição Qui-quadrado com ν graus de liberdade. Se Z e V são independentes, então a distribuição da variável aleatória t será:

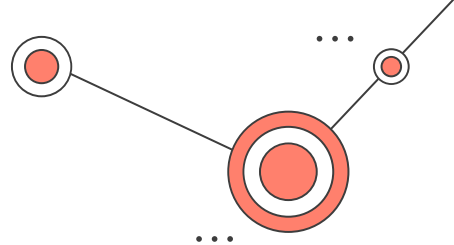
$$t = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$$

A FDP é:

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}, \quad t \in \mathbb{R}$$



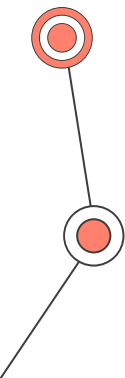
Distribuição t de Student



A distribuição “t” encontra-se tabelada para diferentes combinações de probabilidade e graus de liberdade.

Quando os valores da média e desvio padrão, μ e σ , não são conhecidos, e fazemos inferências sobre uma população a partir das estimativas da média e do desvio padrão, ou seja, obtidas nas amostras, utiliza-se a distribuição “t”.

Um exemplo clássico de uso desta distribuição é a estimativa do intervalo de confiança para a média populacional a partir de uma amostra representativa.



Distribuição t de Student

Tabela:

Distribuição t-Student : Valores t_c tais que $P(-t_c \leq t \leq t_c) = 1 - p$

	p->90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0.2%	0.1%	
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	15,894	31,821	63,656	318,289	636,578	1
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925	22,328	31,600	2
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841	10,214	12,924	3
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604	7,173	8,610	4
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032	5,894	6,869	5
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707	5,208	5,959	6
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499	4,785	5,408	7
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355	4,501	5,041	8
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250	4,297	4,781	9
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169	4,144	4,587	10
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106	4,025	4,437	11
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055	3,930	4,318	12
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012	3,852	4,221	13
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977	3,787	4,140	14
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947	3,733	4,073	15
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921	3,686	4,015	16
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898	3,646	3,965	17
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878	3,610	3,922	18
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861	3,579	3,883	19
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845	3,552	3,850	20
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831	3,527	3,819	21
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819	3,505	3,792	22
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807	3,485	3,768	23
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797	3,467	3,745	24
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787	3,450	3,725	25
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779	3,435	3,707	26
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771	3,421	3,689	27
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763	3,408	3,674	28
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756	3,396	3,660	29
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750	3,385	3,646	30
35	0,127	0,255	0,388	0,529	0,682	0,852	1,052	1,306	1,690	2,030	2,133	2,438	2,724	3,340	3,591	35
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704	3,307	3,551	40
50	0,126	0,255	0,388	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678	3,261	3,496	50
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660	3,232	3,460	60
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,076	2,358	2,617	3,160	3,373	120
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,675	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,054	2,327	2,576	3,091	3,291	∞

Distribuição t de Student

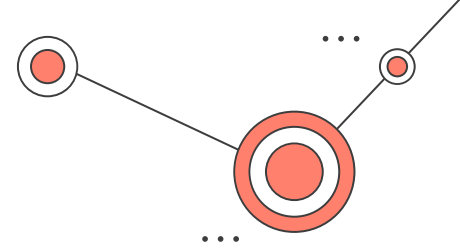
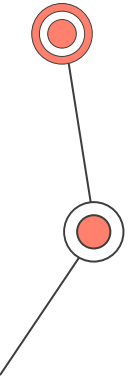
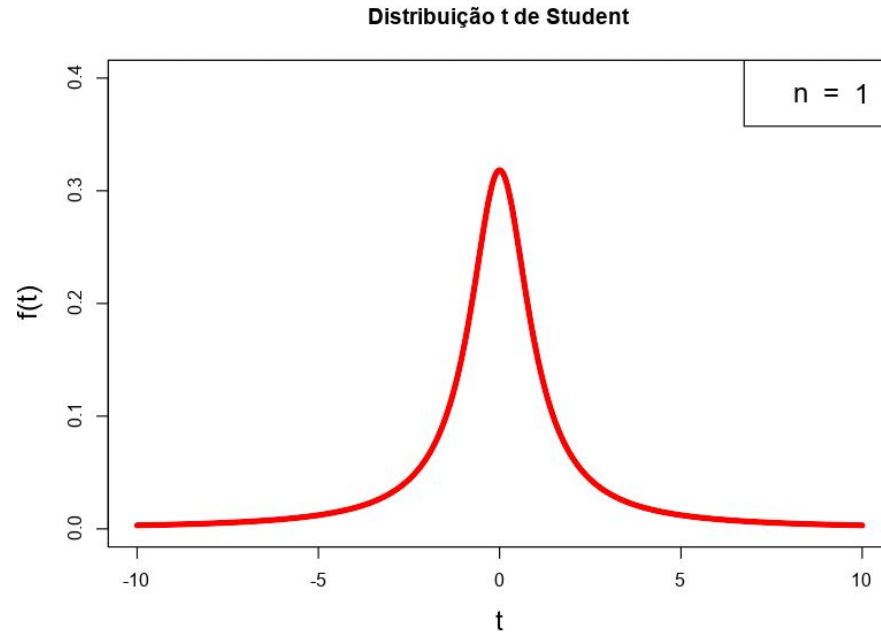
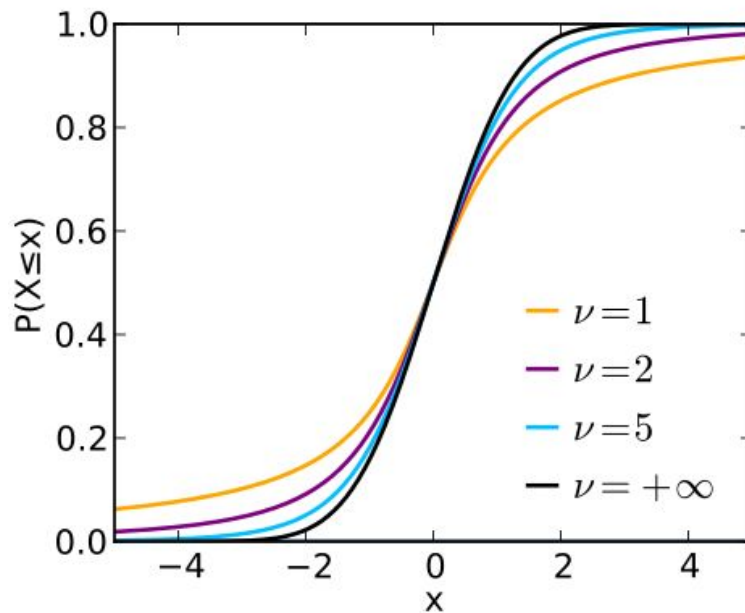


Grafico da FDP:



Distribuição t de Student

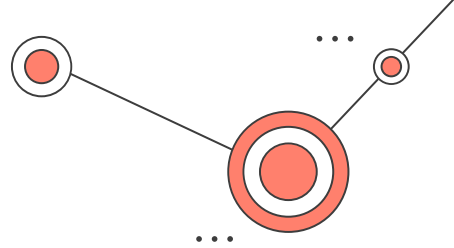
Gráfico da FDA:



04

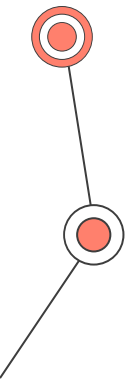
Distribuição F de Snedecor

Distribuição F de Snedecor

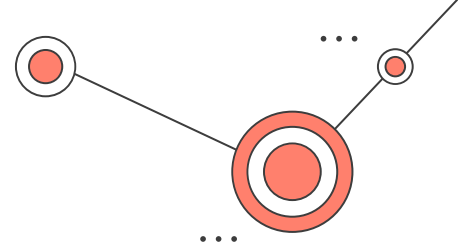


A distribuição F de probabilidade foi reduzida por Snedecor sendo sua denominação uma homenagem a Fisher

É uma distribuição de probabilidade contínua que surge frequentemente como a distribuição nula da estatística de um teste, mais notadamente na análise de variância, como no teste F



Distribuição F de Snedecor

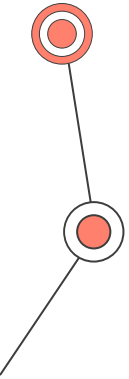


Uma variável que tem distribuição F surge como a razão de dois valores observados de distribuição qui-quadrado apropriadamente escalados:

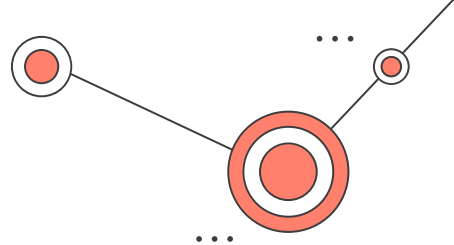
$$F_{n,m} = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \quad X = \chi_n^2 \quad Y = \chi_m^2$$

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição F de Snedecor com m graus de liberdade no denominador e n graus de liberdade no numerador se sua função densidade de probabilidade é definida por:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{x^{\left(\frac{m-2}{2}\right)}}{\left([1+\left(\frac{m}{n}\right)x]\right)^{\left(\frac{m+n}{2}\right)}}, x \geq 0$$



Distribuição F de Snedecor

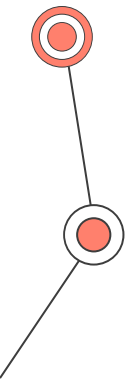


Entre as distribuições contínuas de probabilidades é uma das mais utilizadas para inferências estatísticas em experimentação.

Na análise de variância de experimentos esta distribuição é intensamente utilizada para a tomada de decisão nos testes de hipóteses (inferências sobre as populações).

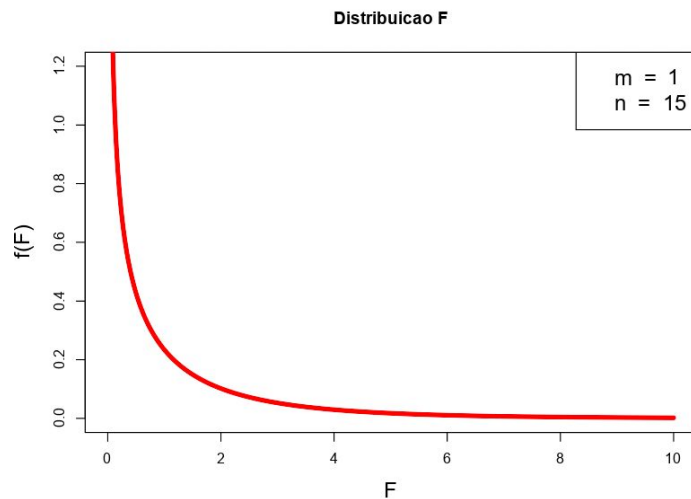
Possuindo dois parâmetros: grau de liberdade do numerador e grau de liberdade no denominador, que são denominados, comumente, por ϕ_1 e ϕ_2 respectivamente, ela encontra-se tabelada para as probabilidades mais utilizadas nos testes de hipóteses: 1%, 5% e 10%.

Tal como a distribuição χ^2 , esta distribuição de probabilidades não apresenta uma forma fixa, mas sim variável de acordo com os graus de liberdade envolvidos:

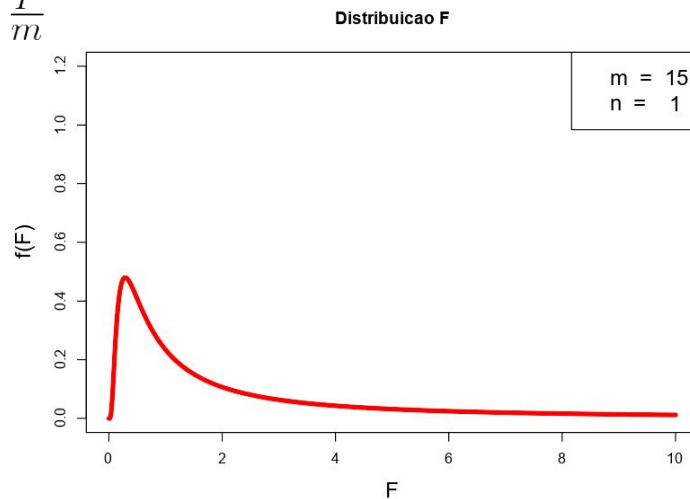


Distribuição F de Snedecor

Distribuição F com m crescendo



Distribuição F com n crescendo



$$F_{n,m} = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$$

Distribuição F de Snedecor

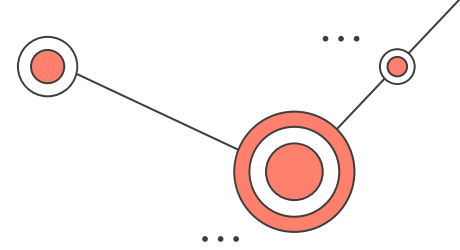
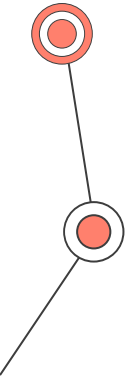
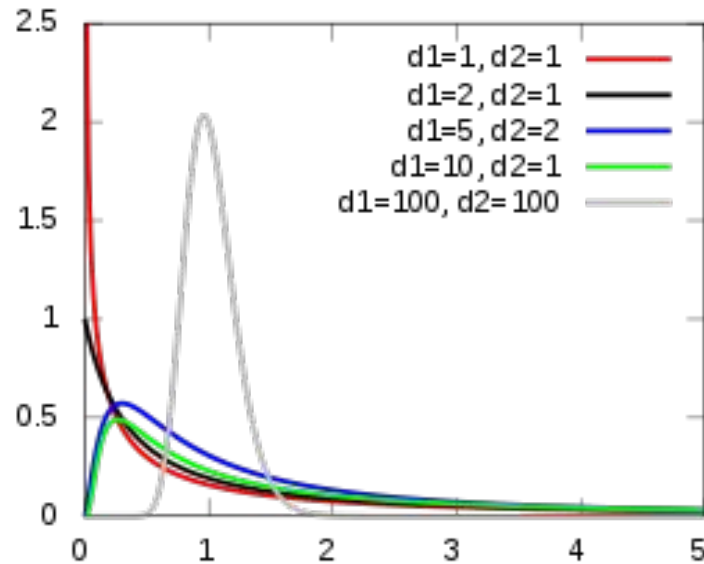


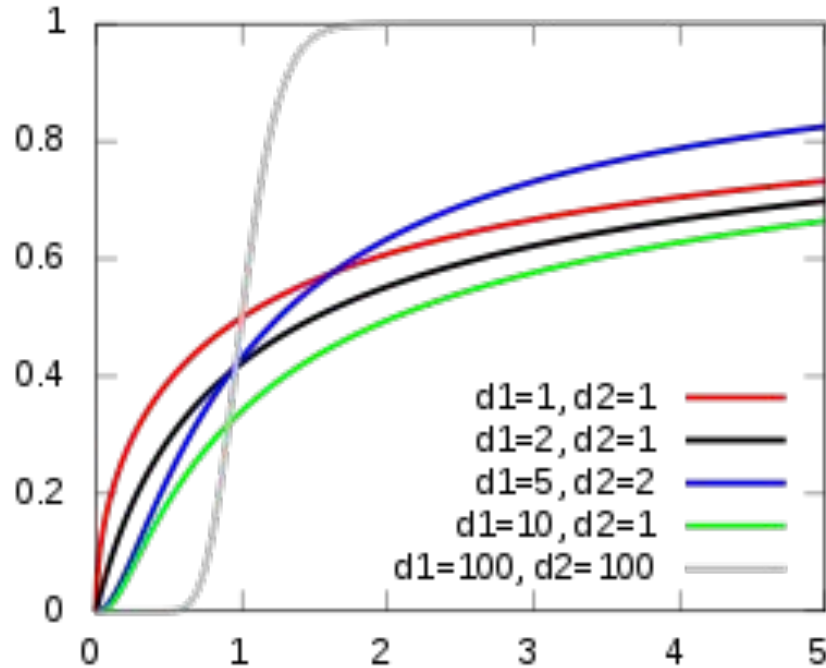
Gráfico da FDP:



Distribuição F de Snedecor

Gráfico da FDA:

$$I_{\frac{d_1 x}{d_1 x + d_2}} \left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2} \right)$$



Distribuição F de Snedecor

Tabela 5. Limites unilaterais da distribuição F de Fisher-Snedecor ao nível de 5% de probabilidade.

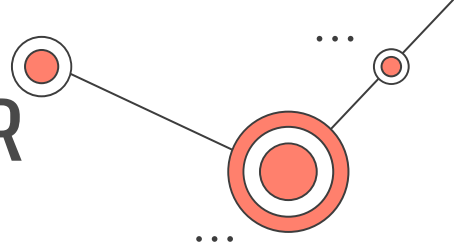
G.L.	V1																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	40	60	120	240				
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.0	243.9	244.7	245.4	245.9	248.0	251.1	252.2	253.3	253.8				
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.329	19.353	19.371	19.385	19.396	19.405	19.412	19.419	19.424	19.429	19.446	19.471	19.479	19.487	19.492				
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.785	8.763	8.745	8.729	8.715	8.703	8.660	8.594	8.572	8.549	8.538				
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964	5.936	5.912	5.891	5.873	5.858	5.803	5.717	5.688	5.658	5.643				
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.704	4.678	4.655	4.636	4.619	4.558	4.464	4.431	4.398	4.382				
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	4.027	4.000	3.976	3.956	3.938	3.874	3.774	3.740	3.705	3.687				
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.603	3.575	3.550	3.529	3.511	3.445	3.340	3.304	3.267	3.249				
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.688	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347	3.313	3.284	3.259	3.237	3.218	3.150	3.043	3.005	2.967	2.947				
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	3.102	3.073	3.048	3.025	3.006	2.936	2.826	2.787	2.748	2.727				
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.943	2.913	2.887	2.865	2.845	2.774	2.661	2.621	2.580	2.559				
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719	2.646	2.531	2.490	2.448	2.426				
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.544	2.426	2.384	2.341	2.319				
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533	2.459	2.339	2.297	2.252	2.230				
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.388	2.266	2.223	2.178	2.155				
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.328	2.204	2.160	2.114	2.090				
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.276	2.151	2.106	2.059	2.035				
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.230	2.104	2.058	2.011	1.986				
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.191	2.063	2.017	1.968	1.943				
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.155	2.026	1.980	1.930	1.905				
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.310	2.278	2.250	2.225	2.203	2.124	1.994	1.946	1.896	1.870				
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321	2.283	2.250	2.222	2.197	2.176	2.096	1.965	1.916	1.866	1.839				
22	4.301	3.443	3.048	2.816	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297	2.259	2.226	2.198	2.173	2.151	2.071	1.938	1.889	1.838	1.811				
23	4.279	3.422	3.026	2.794	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275	2.236	2.204	2.175	2.150	2.128	2.048	1.914	1.865	1.813	1.785				
24	4.260	3.403	3.007	2.775	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255	2.216	2.183	2.155	2.130	2.108	2.027	1.892	1.842	1.790	1.762				
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.605	2.492	2.405	2.337	2.282	2.236	2.198	2.165	2.136	2.111	2.089	2.007	1.872	1.822	1.768	1.740				
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.589	2.476	2.388	2.321	2.265	2.220	2.181	2.148	2.119	2.094	2.072	1.990	1.853	1.803	1.749	1.720				
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.574	2.461	2.373	2.305	2.250	2.204	2.166	2.132	2.103	2.078	2.056	1.974	1.836	1.785	1.731	1.702				
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.559	2.446	2.358	2.290	2.234	2.188	2.150	2.118	2.089	2.064	2.041	1.959	1.820	1.769	1.714	1.685				
29	4.183	3.326	2.934	2.701	2.546	2.433	2.345	2.277	2.221	2.175	2.137	2.104	2.075	2.050	2.027	1.945	1.806	1.754	1.698	1.669				
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.333	2.265	2.210	2.164	2.126	2.092	2.063	2.037	2.015	1.932	1.792	1.740	1.683	1.654				
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077	2.038	2.003	1.974	1.948	1.924	1.839	1.693	1.637	1.577	1.544				
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026	1.986	1.952	1.921	1.895	1.871	1.784	1.634	1.576	1.511	1.476				
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.952	1.917	1.887	1.860	1.836	1.748	1.594	1.534	1.467	1.430				
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951	1.910	1.875	1.845	1.817	1.793	1.703	1.545	1.482	1.411	1.370				
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927	1.886	1.850	1.819	1.792	1.768	1.676	1.515	1.450	1.376	1.333				
120	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.016	1.959	1.910	1.869	1.834	1.803	1.775	1.750	1.659	1.495	1.429	1.352	1.307				
240	3.881	3.033	2.642	2.409	2.252	2.136	2.048	1.977	1.919	1.870	1.829	1.793	1.761	1.733	1.708	1.614	1.445	1.375	1.290	1.237				

Referências

Material de apoio do semestre 2019.1 - João Henrique dos Santos Queiroz

<https://www.voitto.com.br/blog/artigo/distribuicao-normal>

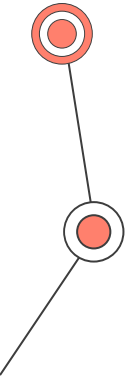
Auxílio visual para os exemplos em R



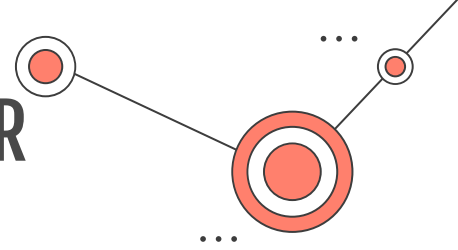
Dada a função:

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & \text{para } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{para quaisquer outros valores} \end{cases}$$

- a. Verificar se $f(y)$ é uma FDP
- b. Calcule a probabilidade de $0 < y < 0,5$
- c. Calcule a probabilidade de $0,5 < y < 1$



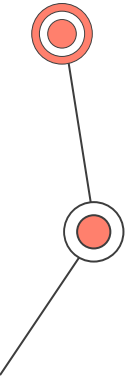
Auxílio visual para os exemplos em R



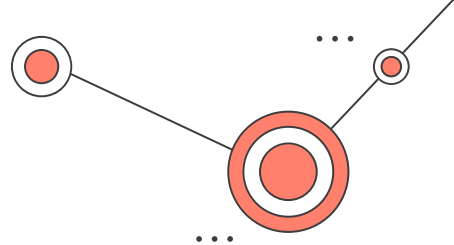
Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & , \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- Mostre que essa função é uma FDP
- Calcule a probabilidade de $X > 1$
- Calcule a probabilidade de que $0.2 < X < 0.8$



Distribuição Normal Padrão



No R, a distribuição normal pode ser utilizada por meio das funções abaixo, em todas elas pode ser definir a média (mean) e o desvio padrão (sd):

`dnorm(x, mean, sd)` - densidade de probabilidade no ponto x

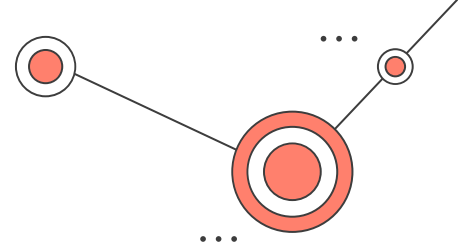
`pnorm(x, mean, sd)` - função de probabilidade acumulada no ponto x

`qnorm(p, mean, sd)` - quantil correspondente a uma dada probabilidade p

`rnorm(n, mean, sd)` - amostra da distribuição normal de tamanho n



Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)



No R, a distribuição χ^2 pode ser utilizada por meio das funções abaixo, em todas elas pode ser definir o grau de liberdade (df):

`dchisq(x, df)` - densidade de probabilidade no ponto x

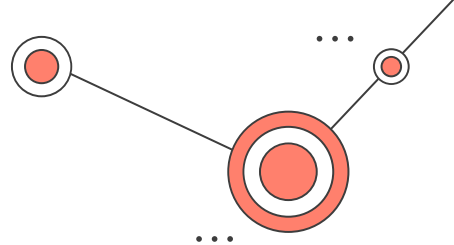
`pchisq(x, df)` - função de probabilidade acumulada no ponto x

`qchisq(p, df)` - quantil correspondente a uma dada probabilidade p

`rchisq(n, df)` - amostra da distribuição χ^2 de tamanho n



Distribuição t de Student



No R, a distribuição t pode ser utilizada por meio das funções abaixo, em todas elas pode ser definir o grau de liberdade (df):

$dt(x, df)$ - densidade de probabilidade no ponto x

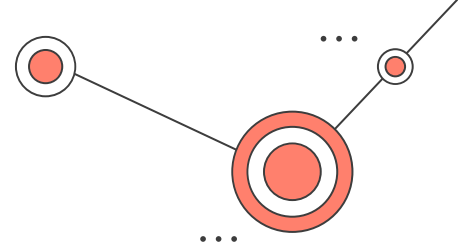
$pt(x, df)$ - função de probabilidade acumulada no ponto x

$qt(p, df)$ - quantil correspondente a uma dada probabilidade p

$rt(n, df)$ - amostra da distribuição t de tamanho n



Distribuição F de Snedecor



No R, a distribuição F pode ser utilizada por meio das funções abaixo, em todas elas pode se definir os graus de liberdade do numerador (df1) e denominador (df2):

$df(x, df1, df2)$ - densidade de probabilidade no ponto x

$pf(x, df1, df2)$ - função de probabilidade acumulada no ponto x

$qf(p, df1, df2)$ - quantil correspondente a uma dada probabilidade p

$rf(n, df1, df2)$ - amostra da distribuição F de tamanho n

