

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ

# Introdução ao Estudo da Probabilidade



Ciência da Computação - Ariadne Nascimento Matos  
Probabilidade e Estatística - 2018.2



# Índice

- Probabilidade
- Experimento :Determinístico e Aleatório
- Espaço Amostral e Evento: Tipos de Evento
- Operações com Conjuntos: União, Intersecção, Complementar
- Conceito e Definições de Probabilidade
- Axiomas Principais Teoremas da Probabilidade
- Probabilidades Finitas dos espaços amostrais finitos
- Espaços Amostrais Finitos e Equiprováveis
- Diagrama de Árvores
- Probabilidade Condicional,Regra do Produto, Independência Estatística
- Partição, Probabilidade Total e Teorema de Bayes



# Probabilidade

Estuda eventos aleatórios, ou seja eventos que mesmo sendo realizados sob as mesmas condições não dão o mesmo resultado. Na probabilidade são calculadas as chances de ocorrência de experimentos. Por exemplo, no lançamento de um dado é impraticável tentar prever seu resultado.



# Experimento Determinístico

- ❖ Os resultados são sempre os mesmos
- ❖ Independe do experimento
- ❖ Os parâmetros são bem conhecidos e não precisam ser estimados





# Experimento Aleatório

- ❖ Cada experimento poderá ser repetido
- ❖ Todos os possíveis resultados são conhecidos
- ❖ Resulta em um valor desconhecido dentre todos os possíveis resultados
- ❖ Quando é realizado um grande número de vezes ele apresenta uma regularidade



# Experimento Aleatório

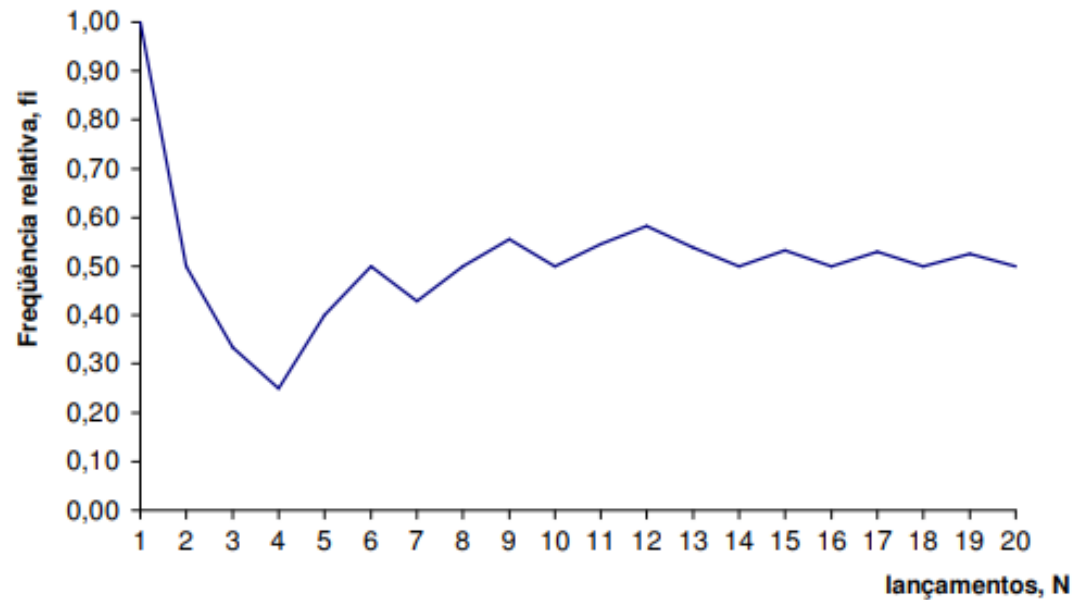
$$f_i = n/N$$

$f_i$  : frequência relativa

$N$  : número de repetições

$n$  : número de sucessos de um resultado particular

# Experimento Aleatório



c/k	lan	suc/lan = n/N	fi
c	1	1/1	1,00
k	2	1/2	0,50
k	3	1/3	0,33
k	4	1/4	0,25
c	5	2/5	0,40
c	6	3/6	0,50
k	7	3/7	0,43
c	8	4/8	0,50
c	9	5/9	0,56
k	10	5/10	0,50
c	11	6/11	0,55
c	12	7/12	0,58
k	13	7/13	0,54
k	14	7/14	0,50
c	15	8/15	0,53
k	16	8/16	0,50
c	17	9/17	0,53
k	18	9/18	0,50
c	19	10/19	0,53
k	20	10/20	0,50



# Espaço Amostral ( $\Omega$ )

Um conjunto não vazio  $\Omega$ , cujos elementos representam todos os resultados possíveis de um determinado experimento aleatório, é chamado de *espaço amostral*.

Discreto  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Finito: conjunto finito de pontos} \\ \text{Infinito: conjunto infinito e enumerável} \end{array} \right.$

Contínuo: Conjunto não enumerável



$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



# Experimento Aleatório e Espaço Amostral

$\mathcal{E}_1$  - Lançamento de uma moeda:  $\Omega = \{ \text{cara, coroa} \}$

$\mathcal{E}_2$  - Plantar duas estacas e verificar o enraizamento:  $\Omega = \{ (e, e), (e, \bar{e}), (\bar{e}, e), (\bar{e}, \bar{e}) \}$

$\mathcal{E}_3$  - Medir a altura de um aluno da Uesc:  $\Omega = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \}$



# Evento

Qualquer subconjunto  $A$  do espaço amostral  $\Omega$ , isto é,  $A \subseteq \Omega$ , ao qual atribuímos uma probabilidade, é dito um evento aleatório.

I





# Tipos de Evento

- Evento simples: É aquele formado por um único elemento do espaço amostral.
- Evento Composto: É aquele formado por dois ou mais elementos do espaço amostral.
- Evento certo: É aquele que ocorre sempre, isto é, em todas as realizações da experiência.



# Tipos de Evento

No lançamento de uma moeda: (Evento Simples)

$$\mathcal{E}_1 = \{k\} \text{ e } \mathcal{E}_2 = \{c\}$$

No lançamento de um dado podemos considerar, entre outros, os seguintes eventos: (Evento Composto)

$$\mathcal{E}_1 = \{2, 4\} \quad \mathcal{E}_2 = \{1, 3, 5\} \quad \mathcal{E}_3 = \{2, 4, 6, 5\}$$

Lançamento de um dado: (Evento Certo)

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



# Evento Impossível

São os eventos que não possuem elementos no espaço amostral, ou seja, nunca ocorrem.

- $A$  = Ocorrer o número 7 na face de um dado. Este evento é impossível pois o número 7 não figura no espaço amostral dos números possíveis na face de um dado, logo evento  $P(\Omega) = 0$ .



# Evento

Sendo  $S$  o espaço amostral finito, verifica-se que  $p^n$  fornece o número total de eventos extraídos de  $S$ :

$$S = p^n$$

Onde:

$p$  = valores possíveis (moeda = 2; dado = 6)

$n$  = número de elementos do evento



# Evento

Seja o experimento E jogar três moedas e observar os resultados:

$$S = \{(ccc), (cck), (ckc), (kcc), (kkk), (kkc), (kck), (ckk)\}$$

$$p=2$$

$$n=3$$



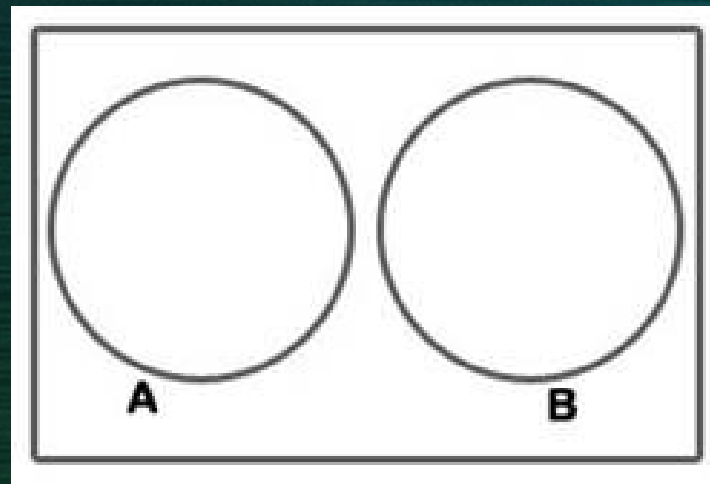
$$S = p^n = 2^3 = 8$$



# Eventos Mutuamente Exclusivos

- Dois eventos  $E_1$  e  $E_2$  são mutuamente exclusivos, se eles não puderem ocorrer simultaneamente (é um ou o outro).

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset ; \text{ logo } P(E_1 \cap E_2) = 0$$





# Eventos Mutuamente Exclusivos

$\mathcal{E}_4$ : jogar um dado e observar o resultado -

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

-Eventos:

- A = Ocorrer o número par
- B = Ocorrer o número ímpar

$$A = \{2,4,6\} \text{ e } B = \{1,3,5\} \text{ logo } A \cap B = \emptyset$$



# Sintetizando...



Experimento Probabilístico:  
Lançar um dado



Espaço Amostral:  
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



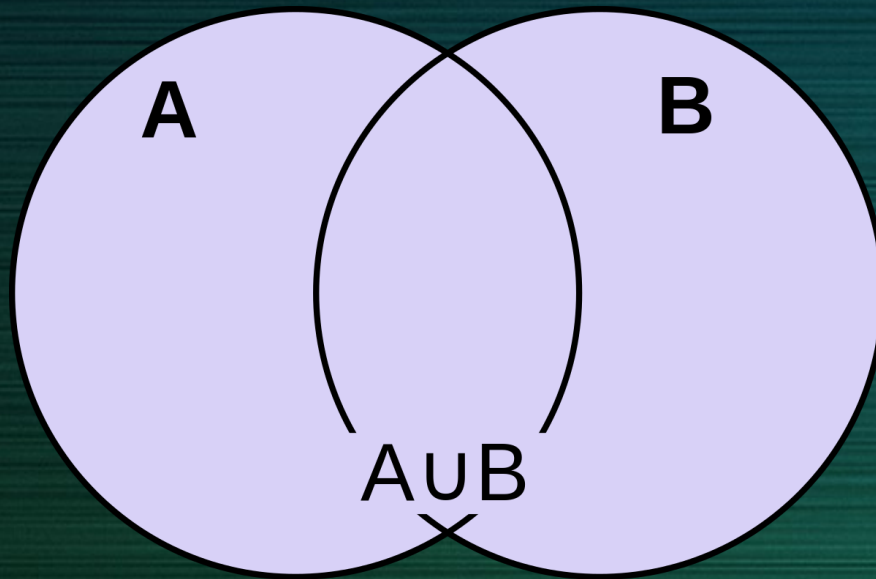
Evento(números pares):  
 $\{2, 4, 6\}$



# Operações com Conjuntos

- União :  $A \cup B$

É o evento que ocorre se A ocorre, ou B ocorre, ou ambos ocorrem.





# Operações com Conjuntos

- União :  $A \cup B$

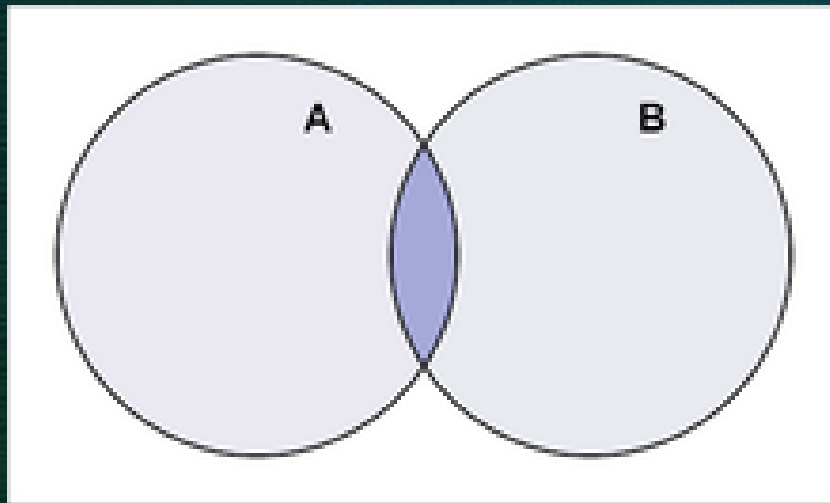
$\mathcal{E}_1$ : No lançamento de um dado ( $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ) considere os eventos  $A = \text{“par”} = \{2, 4, 6\}$  e  $B = \text{“múltiplo de 3”} = \{3, 6\}$ . O evento “A ou B” contém todos os resultados que sejam pares ou múltiplos de 3 (ou ambos!), e é dado por  $C = A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ .



# Operações com Conjuntos

- Interseção :  $A \cap B$

É o evento que ocorre se A e B ocorrem simultaneamente.





# Operações com Conjuntos

- Interseção :  $A \cap B$

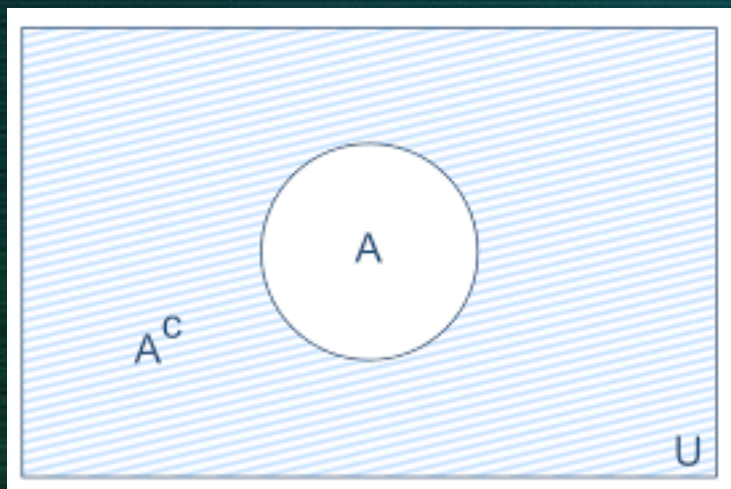
$\mathcal{E}_2$ : No lançamento de um dado ( $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ) considere os eventos  $A = \text{“par”} = \{2, 4, 6\}$  e  $B = \text{“múltiplo de 3”} = \{3, 6\}$ . O evento “A e B” contém todos os resultados que sejam pares e ao mesmo tempo múltiplos de 3, e é dado por  $C = A \cap B = \{6\}$ .



# Operações com Conjuntos

- Complementar :  $A'$

Denotamos por  $A'$  o complementar do conjunto  $A$ , dado por  $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ , ou seja, o conjunto das realizações  $\omega$  para as quais o evento  $A$  não ocorre, portanto  $A^c$  é o evento “não  $A$ ”





# Operações com Conjuntos

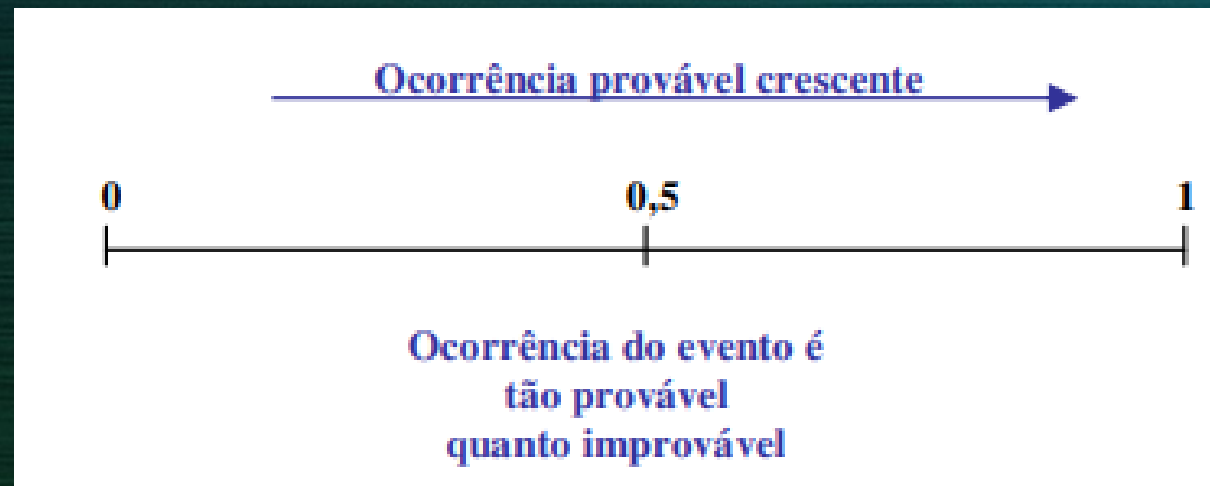
- Complementar :  $A'$

$\mathcal{E}_3$  : No lançamento de um dado ( $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ) considere o evento  $A = \text{"par"} = \{2, 4, 6\}$ . O evento "não  $A$ " contém todos os resultados que não sejam pares, ou seja, que são ímpares, e é dado por  $C = A^c = \{1, 3, 5\}$ .



# Conceito e Definições de Probabilidade

Conceito: a probabilidade é uma medida numérica da provável ocorrência de um evento. (A ocorrência de um evento é tão provável quanto improvável).





# Conceito e Definições de Probabilidade

- **Definição Clássica:** Se um experimento aleatório puder resultar em  $n$  diferentes e igualmente prováveis resultados, e  $n_{ei}$  destes resultados referem-se ao evento  $e_i$ , então a probabilidade do evento  $E_i$  ocorrer será:

$$P(e_i) = n_{ei} / n$$

$n_{ei}$ : número de vezes que o resultado  $e_i$  ocorre

$n$ : número total de vezes



# Conceito e Definições de Probabilidade

$\mathcal{E}_1$  : Seja o seguinte Experimento Aleatório: lançamento de um dado não viciado e observação da face voltada para cima. Calcular as probabilidades de ocorrência dos seguintes eventos:

- a) Face 1.
- b) Face par.
- c) Face menor ou igual a 2.





# Conceito e Definições de Probabilidade

1) O evento “**face 1**” tem apenas um resultado associado: { 1 }. Então:

**$n_1 = 1$ , e a probabilidade de ocorrer :  $P(ei) = n_1 / n = 1/6$**

2) O evento “**face par**” tem três resultados associados: {2, 4, 6}. Então:

**$n_1 = 3$ , e a probabilidade de ocorrer :  $P(ei) = n_1 / n = 3/6$**

3) O evento “**face menor ou igual a 2**” tem dois resultados associados

**{1,2}.Então:  $n_1 = 2$ , e a probabilidade de ocorrência:  $P(ei) = 2/6$**



# Conceito e Definições de Probabilidade

- **Definição Experimental:** Seja um experimento aleatório repetido que é repetido  $n$  vezes, e  $e_i$  um evento associado. A frequência relativa do evento  $e_i$ :

$$f(R_{e_i}) = n_{e_i} / n$$

- $n_{e_i}$ : número de vezes que  $e_i$  ocorreu
- $n$ : total de tentativas



# Axiomas

- Seja um experimento aleatório com um espaço amostral associado a ele, e seja  $E_i$  ( $i= 1, 2, \dots, n$ ) um evento genérico.
  - a)  $0 \leq P(E_i) \leq 1$  ( para qualquer evento)
  - b)  $P(\Omega) = 1$  ( para qualquer espaço amostral)
  - c)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  se  $A \cap B = \emptyset$  (mutuamente excludentes)

**Axioma:** proposição geral que não tem demonstração, recebida e aceita por todos como verdadeira e evidente.



# Principais Teoremas da Probabilidade

1.  $P(\emptyset) = 0$

2. Se  $A'$  é o complemento de  $A$ , então  $P(A) = 1 - P(A')$

3. Se  $A$  e  $B$  forem dois eventos quaisquer, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ ( Teorema da Soma)}$$

4. Se  $A \subset B$ , então  $P(A) \leq P(B)$



# Principais Teoremas da Probabilidade

Se  $A$  é o evento “um estudante fica em casa para estudar”,  $B$  o evento “ele vai ao cinema”,  $P(A) = 0,64$  e  $P(B) = 0,21$ , determine:

a)  $P(A')$ ;  $P(A \cup B)$ ; c)  $P(A \cap B)$



# Principais Teoremas da Probabilidade

a)  $A'$  o evento que consiste em o estudante não ficar em casa:

$$1 - P(A) = 1 - 0,64 = 0,36$$

b) Como A e B são mutuamente excludentes aplicamos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,64 + 0,21 = 0,85$$

c) Como A e B são mutuamente excludentes não podem ocorrer simultaneamente, logo :  $P(A \cap B) = 0$



# Probabilidades Finitas dos espaços amostrais finitos

Seja um espaço amostral finito  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . A cada evento elementar  $a_i$  associa-se um número  $p_i$  denominado probabilidade de  $a_i$ ,  $P(a_i)$  ou simplesmente  $P_i$ , satisfazendo as seguintes condições:

$$p_i \geq 0 \text{ (} i = 1, 2, \dots, n \text{) e } p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$



Três carros (A, B e C) estão em uma corrida; A tem 3 vezes mais chances de ganhar que B; e B tem 2 vezes mais chances de vencer que C. Quais são as probabilidades de vitória de cada um, isto é,  $P(A)$ ,  $P(B)$  e  $P(C)$ ?

Fazendo:  $P(C) = p$ ;  $P(B) = 2p$ ;  $P(A) = 6p$

$$2p + 6p + p = 1 \Rightarrow p = 1/9$$

Logo:  $P(A) = 6/9$ ;  $P(B) = 2/9$ ;  $P(C) = 1/9$

Probabilidade de B ou C ganhar:  $P(B \cup C) = 2/9 + 1/9 = 3/9$



# Espaços Amostrais Finitos Equiprováveis

- Quando se associa a cada ponto amostral a mesma probabilidade
- Se um evento  $E$  contém  $n$  pontos:

$$P(E) = n \cdot (1/n)$$

- Se  $s$  tem  $n$  pontos:

$$P(s) = 1/n$$



# Espaços Amostrais Finitos Equiprováveis

Desta forma, podemos definir a probabilidade de um evento  $E = \{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}\}$  composto por  $k$  elementos como sendo:

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } E}{\text{número de casos possíveis de } S} = \frac{k}{n}$$



# Espaços Amostrais Finitos Equiprováveis

Um baralho possui 52 cartas. Uma delas é extraída ao acaso.

Qual é a probabilidade de ser sorteada:

a) a carta com o rei de copas?

$$P(E) = 1/52$$

b) uma carta de espadas?

$$P(E) = 13/52 = 1/4$$



# Espaços Amostrais Finitos Equiprováveis

- A análise combinatória (teoria da contagem) tem fundamental importância para contar o número de casos favoráveis e o total de casos. A combinação de  $N$  elementos tomados (combinados)  $n$  a  $n$ , sendo  $n \leq N$ , é calculado por:

$$C_{N,n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$



- Para ganhar o maior prêmio da Mega-Sena um apostador precisa acertar 6 números entre os 60 possíveis. Calcule essa probabilidade:
- Total de combinações possíveis de 6 números(entre os 60 possíveis)

$$C_{60,6} = \frac{60!}{6!(60-6)!} = \frac{60.59.58.57.56.55.54!}{6!54!} = 50.063.860$$

- Total de combinações de 6 números(entre os 6 sorteados):

$$C_{6,6} = \frac{6!}{6!(6-6)!} = \frac{6!}{6!} = 1 \quad \text{Logo : } P = \frac{C_{6,6}}{C_{60,6}} = \frac{1}{50.063.860}$$

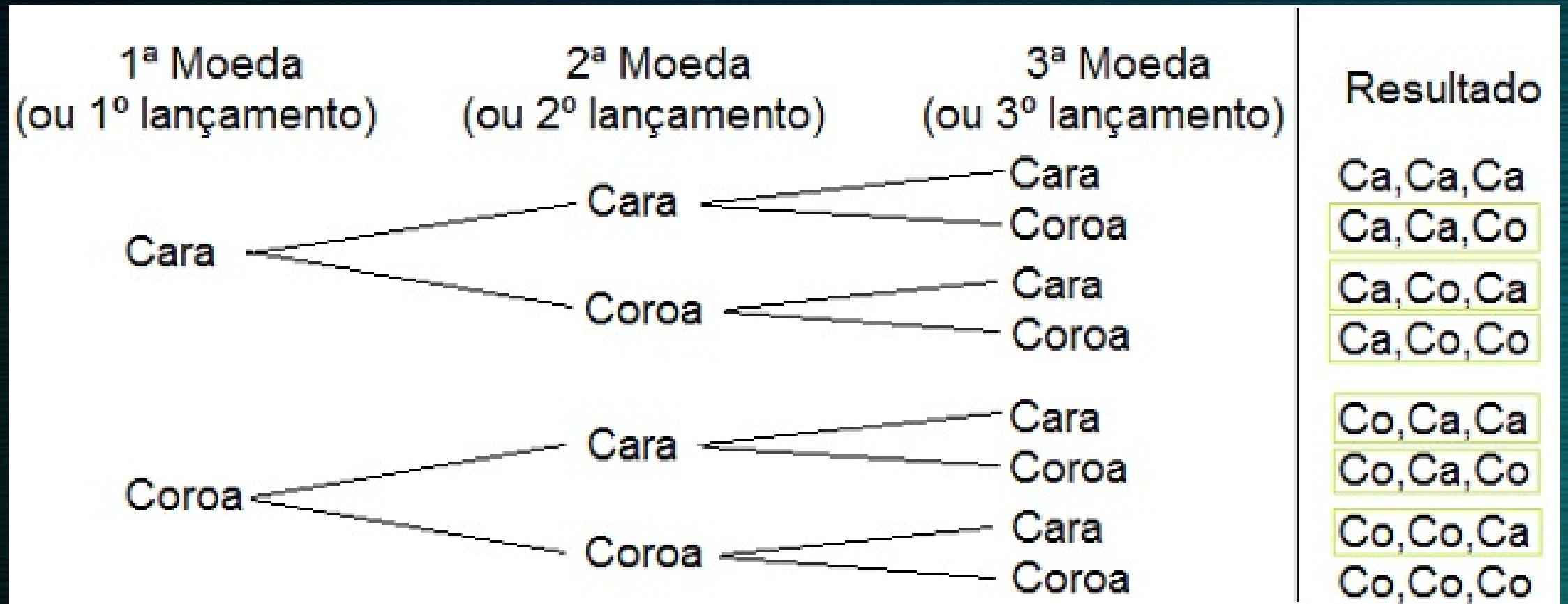


# Diagrama de Árvore de Probabilidades

Representa as várias possibilidades de uma permutação ou combinação. Provê uma maneira conveniente de organizar as informações de um conjunto de eventos condicionais.

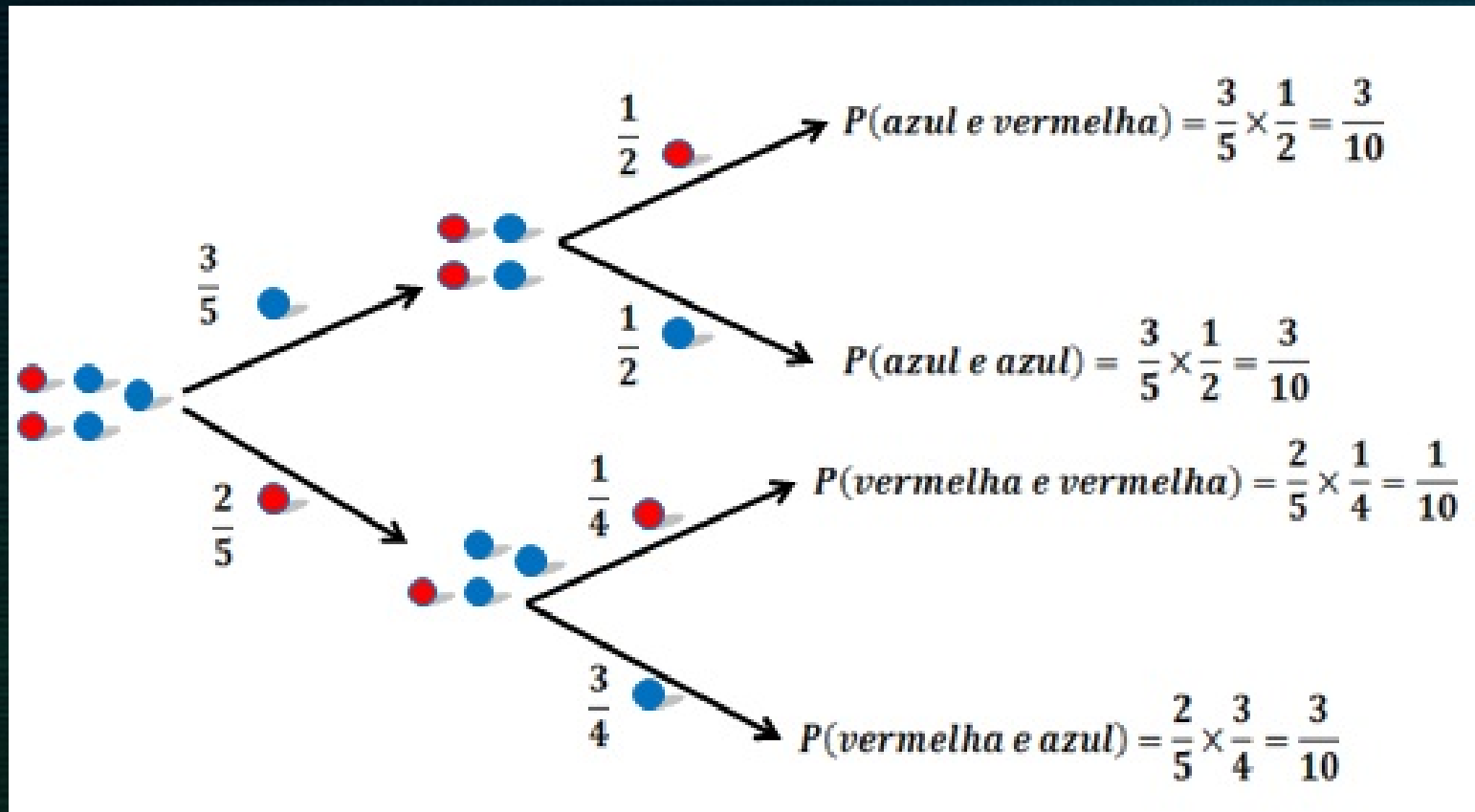


# Diagrama de Árvore de Probabilidades





# Diagrama de Árvore de Probabilidades



Obs: muito útil para definir o espaço amostral de experimentos aleatórios.



# Probabilidade Condicional

Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos associados ao experimento  $E$ . A probabilidade do evento  $B$  condicionada à ocorrência do evento  $A$ , ou seja, a probabilidade condicional de  $B$  dado  $A$ , é dada por:

$$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A), \text{ para } P(A) > 0$$

$$\text{Analogamente: } P(A/B) = P(A \cap B) / P(B), \text{ para } P(B) > 0$$



# Probabilidade Condicional

Pode-se verificar que  $P(B/A)$  satisfaz aos vários postulados de probabilidade. Isto é:

i)  $0 \leq P(B/A) \leq 1$

ii)  $P(S/A) = 1$

iii)  $P(B_1 \cup B_2)/A = P(B_1/A) + P(B_2/A) - P(B_1 \cap B_2)/A$  ou

$$P(B_1/A) + P(B_2/A) \text{ se } B_1 \cap B_2 = \emptyset$$



# Probabilidade Condicional

- Exemplo:

Os dados abaixo se referem a 200 alunos matriculados em determinado Instituto de matemática, de acordo com o sexo e o curso:

	Masculino	Feminino	Total
MasculinoPura	60	50	110
Estatística	80	10	90
Total	140	60	200



# Probabilidade Condicional

Qual seria a probabilidade de uma pessoa aleatoriamente escolhida:

a) Estar matriculada em matemática pura?

$A = \{\text{aluno faz matemática pura}\}$     $E = \{\text{aluno faz estatística}\}$

$M = \{\text{aluno é do sexo masculino}\}$     $F = \{\text{aluno é do sexo feminino}\}$



# Probabilidade Condicional

a)  $P(A) = 110/200$

	Masculino	Feminino	Total
Matemática pura	60	50	110
Estatística	80	10	90
	140	60	200

b) Estar matriculada em matemática pura, dado ser homem?

$$P(A/M) = P(A \cap M) / P(M) = ((60/200) / (140/200)) \Rightarrow$$

$$60/200 * 200/140 = 60/140$$



c) Ser homem dado que Esta matriculado em estatística?

$$P(M/E) = P ( M \cap E ) / P ( E ) = ((80 / 200) / (90 / 200)) = 80 / 90$$

d) Estar matriculada em matemática pura, sabendo-se que é mulher?

$$P(M/F) = P ( M \cap F ) / P ( F ) = ((50 / 200) / (60 / 200)) = 50 / 60$$

A={aluno faz matemática pura}    E={aluno faz estatística}

M={aluno é do sexo masculino}    F={aluno é do sexo feminino}



# Probabilidade Condicional

Podemos verificar que podemos calcular a probabilidade condicional  $[P(B/A)]$  de dois eventos  $A$  e  $B$  quaisquer de duas maneiras:

- i) Empregando a definição, onde  $P(A \cap B)$  e  $P(A)$  são calculados em relação ao espaço amostral original  $S$ ;
- ii) Diretamente, pela consideração da probabilidade de  $B$  em relação ao espaço amostral reduzido determinado pela ocorrência do evento  $A$ .



# Regra do Produto

“A probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos A e B, do mesmo espaço amostral, é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicional do outro, dado o primeiro.”

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$



# Regra do Produto

Nada mais é que probabilidade condicional:

$$P(A|B) \Rightarrow P(A \cap B) / P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$



Exemplo: Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Duas peças são retiradas, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam boas?

A → a 1ª peça é boa

B → a 2ª peça é boa

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = (8/12) \cdot (7/11) = 4/33$$



# Independência Estatística

Dois eventos A e B, pertencentes a um mesmo espaço amostral (S), são independentes se as seguintes condições são válidas:

**$P(A|B) = P(A)$  e  $P(B|A) = P(B)$ , então:**

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$



# Independência Estatística

Uma moeda é lançada duas vezes. Sejam  $A$  = “a primeira moeda sai cara” e  $B$  = “a segunda moeda sai cara”. Então  $A$  e  $B$  são independentes, pois:

$$P(A) = (\{1\} \times \{0,1\}) = 2/4 = 1/2$$

$$P(B) = (\{0,1\} \times \{1\}) = 2/4 = 1/2$$

$$P(A \cap B) = P(\{1\} \times \{1\}) = 1/4 = P(A).P(B)$$



# Independência Estatística

Os dois dados são lançados. Consideramos os eventos  $A$  = “o primeiro dado é par” e  $C$  = “a soma dos valores dos dados é par”.

Então:

$$P(A) = (\{2,4,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}) = 18/36 = 1/2$$

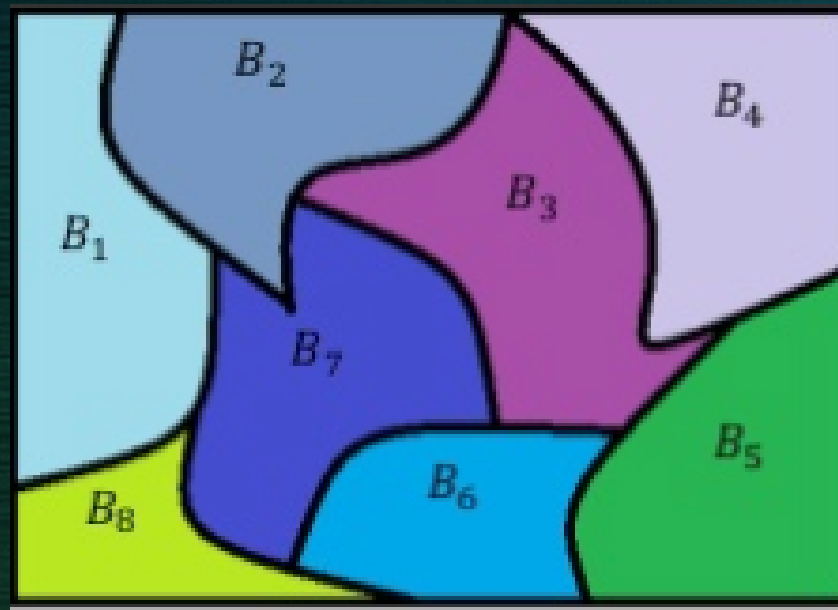
$$P(C) = P(\{2,4,6\}^2 \cup \{1,3,5\}^2) = 18/36 = 1/2$$

$$P(A \cap C) = P(\{2,4,6\}^2) = 9/36 = 1/4 = P(A).P(C)$$



# Partição

Uma partição do espaço amostral é dada por um conjunto de eventos mutuamente exclusivos que quando unidos formam o espaço amostral:





# Partição

Espaço amostral que atende as seguintes condições:

- $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \text{ diferente de } j$  (eventos mutuamente excludentes)
- $\bigcup_{i=1}^k A_i = \Omega$  (união dos eventos corresponde ao espaço amostral)
- $P(A_i) > 0, \forall i = 1, \dots, n$  (probabilidade de cada evento maior que 0)



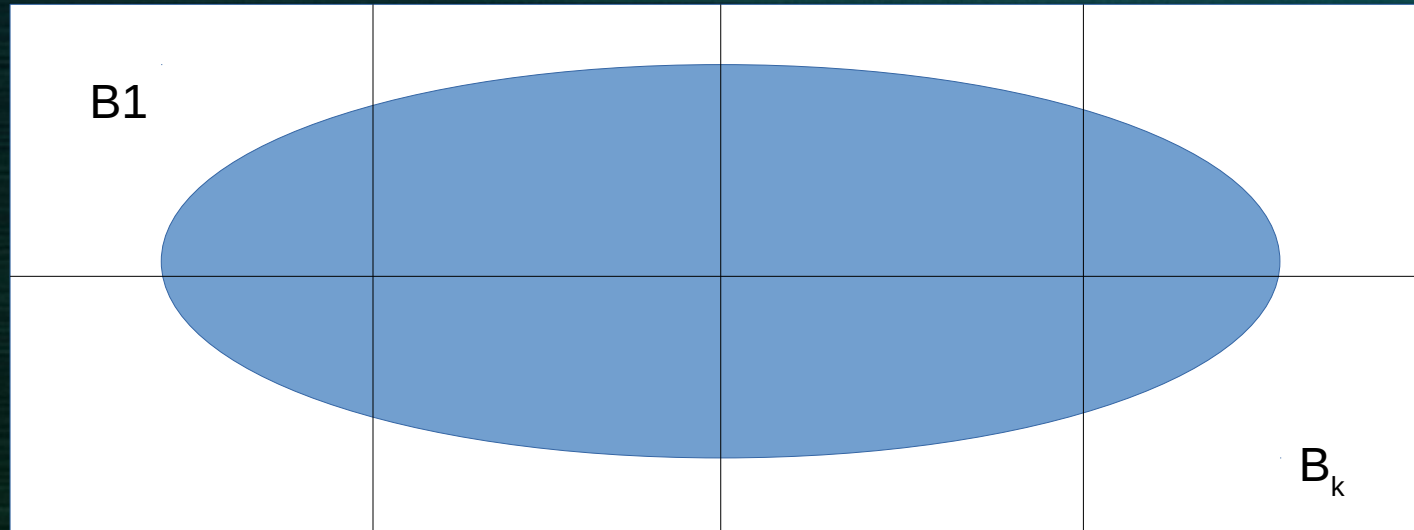
# Probabilidade Total

- Relaciona probabilidades condicionais
- Probabilidade de resultados obtidos através de vários eventos distintos
- Devemos assegurar que o espaço amostral é uma partição



# Probabilidade Total

Vamos considerar o evento  $A$  e o seguinte espaço  $S$  que é formado pelos eventos de  $B_1$  a  $B_k$  para  $k = 8$ .





# Probabilidade Total

- Podemos escrever o evento  $A$  em função dos eventos que compõem o espaço  $S$ .

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)$$

- Como o operador probabilidade é uma função temos:

$$P(A) = P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)]$$

- Sendo os eventos mutuamente excludentes temos:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_k)$$



# Probabilidade Total

- E pela Regra da multiplicação chegamos à expressão da probabilidade total:

$$P(A) = P(A|B_1).P(B_1) + P(A|B_2).P(B_2) + \dots + P(A|B_k).P(B_k)$$



- Supondo que na fabricação de semicondutores a probabilidade seja:
- 0,10 de que um chip esteja sujeito a níveis altos de contaminação durante a fabricação cause uma falha no produto
- 0.01 de que um chip que esteja a níveis médios de contaminação durante a fabricação cause uma falha no produto
- 0.001 de que um chip esteja sujeito a níveis médios



# Probabilidade Total

- Em uma corrida em particular de produção, 20% dos chips estão sujeitos a altos níveis, 30% a níveis médios e 50% a níveis baixos. Qual a probabilidade de que um produto, usando um desses chips, falhe?



# Probabilidade Total

1) Defina os conceitos:

- $H = \{\text{Chip exposto a altos níveis}\}$
- $M = \{\text{Chip exposto a níveis médios}\}$
- $L = \{\text{Chip exposto a níveis baixos}\}$
- $F = \{\text{Falha}\}$



- $H = \{\text{Chip exposto a altos níveis}\}$      $L = \{\text{Chip exposto a níveis baixos}\}$   
•  $M = \{\text{Chip exposto a níveis médios}\}$      $F = \{\text{Falha}\}$

- Do enunciado :

$$P(F|H) = 0.1 ; P(F|M) = 0.01; P(F|L) = 0.001;$$

$$P(H) = 0.2; P(M) = 0.3 \quad P(L) = 0.5$$

- Utilizando a Probabilidade Total:

$$P(F) = P(F|H).P(H) + P(F|M).P(M) + P(F|L).P(L)$$

$$P(F) = 0.1 \times 0.2 + 0.01 \times 0.3 + 0.001 \times 0.5$$

$$P(F) = 0.0235 = 2.35\%$$



# Teorema de Bayes

- Determina a probabilidade condicional de eventos que precedem aquele efetivamente observado
- Calcula uma probabilidade a posteriori a partir de dados fornecidos a priori, quando esses dados não são suficientes
- “Probabilidade das causas”
- Só pode ser utilizado caso o espaço amostral seja uma partição



# Teorema de Bayes

Considere a partição formada por  $n$  eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  e um evento  $B$  que os interseccione. Determinamos a probabilidade a posteriori de cada evento com a seguinte exposição:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k).P(A_k)}{P(B|A_1).P(A_1) + P(B|A_2).P(A_2) + \dots + P(B|A_n).P(A_n)}$$



# Teorema de Bayes

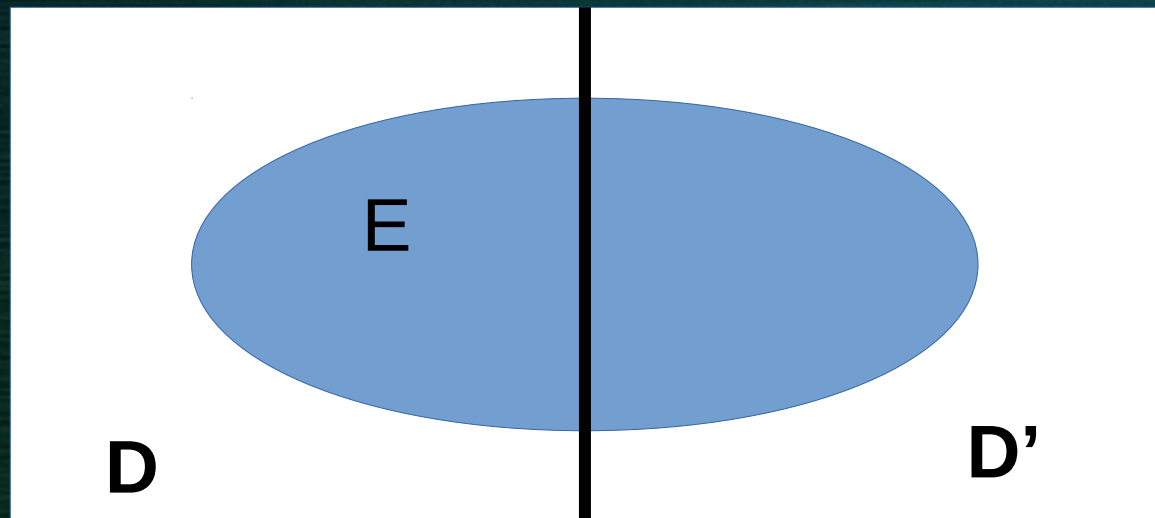
Um exame detecta uma certa doença, caso ela exista com probabilidade 0,9. Se a doença não existir, o exame aponta isso com probabilidade 0,8. Considere que estamos aplicando esses exames em uma população com 10% de incidência dessa doença. Para um indivíduo escolhido ao acaso qual a probabilidade de ele estar realmente doente, se o exame indicou que ele possui a doença? Use o teorema de Bayes.



# Teorema de Bayes

- Defina os eventos:

$D = \{\text{ter doença}\}$ ;  $D' = \{\text{não ter doença}\}$ ;  $E = \{\text{exame positivo}\}$





# Teorema de Bayes

- Do enunciado temos:

$$P(D) = 0,1 ; P(E|D) = 0,9 ; P(E|D') = 0,2$$

- Pelo Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(D|E) &= \frac{P(E|D).P(D)}{P(E|D).P(D) + P(E|D').P(D')} = \frac{0,9.0,1}{0,9.0,1 + 0,2.0,9} \\ &= 0,33 \text{ ou } 33\% \end{aligned}$$



# Bibliografia

- FARIA, José Cláudio. Notas de aulas expandidas – Ilhéus, UESC/DCET, 10 ed. 2009.
- B. R. James. Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário. IMPA, Rio de Janeiro, 3 edn., 2004.
- K.L.Chung, F.Ait Sahlia. Elementary probability theory. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 4 edn., 2003
- ROLLA, Leonardo. Introdução à Probabilidade Notas de Aula, UFMG, Belo Horizonte, 2018